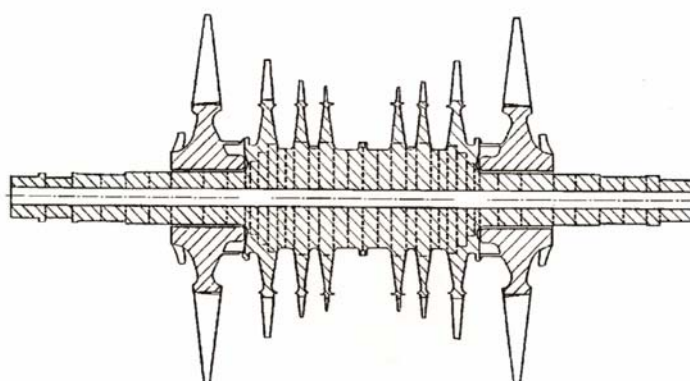


Mircea Radeş

Dinamica maşinilor

II



MIRCEA RADEȘ

**DINAMICA
MAȘINILOR**

II

2009

Prefață

Lucrarea este o traducere a părții a doua a cursului *Dynamics of Machinery* predat din 1993 studenților Filiei Engleze a Facultății de Inginerie în Limbi Străine (F.I.L.S.) la Universitatea Politehnica București. Conținutul cursului s-a lărgit în timp, pornind de la un curs postuniversitar organizat între 1985 și 1990 la Catedra de Rezistența materialelor și continuat până în 2007 la cursul de masterat în specialitatea Siguranța și Integritatea Mașinilor. Capitole din curs au fost predate din 1995 la cursurile de studii aprofundate și masterat organizate la Facultatea de Inginerie Mecanică și Mecatronică.

Dinamica mașinilor a fost introdusă în planul de învățământ al F.I.L.S. în 1993. Pentru a susține cursul, am publicat *Dynamics of Machinery* la U. P. B. în 1995, urmată de *Dinamica sistemelor rotor-lagăre* în 1996 și *Rotating Machinery* în 2005, ultima conținând materialul ilustrativ utilizat în cadrul cursului.

Cursul are un loc bine definit în planul de învățământ, urmărind: a) descrierea fenomenelor dinamice specifice mașinilor; b) modelarea sistemelor rotor-lagăre și analiza acestora cu metoda elementelor finite; c) înarmarea studenților cu baza fizică necesară în rezolvarea problemelor de vibrații ale mașinilor; și d) familiarizarea cu metodele de supraveghere a stării mașinilor și diagnosticare a defectelor.

Fiind un curs predat unor studenți a căror limbă maternă nu este limba engleză, în versiunea în limba engleză au fost reproduse expresii și fraze din lucrări scrise de vorbitori nativi ai acestei limbi. Pentru studenții F.I.L.S. s-a definit și ilustrat în detaliu terminologia specifică limbii engleze.

În prima parte se descriu fenomenele de bază din dinamica rotoarelor, răspunsul dinamic al rotoarelor simple în lagăre rigide și lagăre elastice, precum și principalele etape ale unei analize dinamice a unui rotor. În această a doua parte se prezintă modelarea cu elemente finite a sistemelor rotor-lagăre, lagărele hidrodinamice și etanșările cu lichid și gaz, precum și instabilitatea precesiei rotoarelor. În partea a treia se tratează lagărele cu rulmenți, echilibrarea rotoarelor, măsurarea vibrațiilor pentru supravegherea funcționării mașinilor și diagnosticarea defectelor, standarde și recomandări privind limitele admisibile ale vibrațiilor mașinilor, precum și elemente de dinamica mașinilor cu mecanism bielă-manivelă și vibrațiile conductelor aferente. Nu se tratează vibrațiile paletelor, discurilor paletate și ale roților centrifuge.

Cuprins

Prefață	i
Cuprins	iii
5. Analiza cu elemente finite a sistemelor rotor-lagăre	1
5.1 Modelarea componentelor unui rotor	1
5.2 Cinematica precesiei solidului rigid	3
5.2.1 Triedre de referință	3
5.2.2 Precesia discului rigid	3
5.2.3 Mișcările unghiulare ale axei de rotație	4
5.3 Ecuațiile de mișcare ale componentelor unui rotor	7
5.3.1 Discuri subțiri	7
5.3.2 Elemente de arbore cu secțiunea constantă	13
5.3.3 Lagăre și etanșări	31
5.3.4 Cuplaje elastice	35
5.4 Ecuațiile de mișcare ale sistemului rotor-lagăre-etanșări	36
5.4.1 Ecuațiile de ordinul doi în spațiul configurațiilor	37
5.4.2 Ecuațiile de ordinul întâi în spațiul stărilor	40
5.5 Analiza valorilor proprii	40
5.5.1 Vectori proprii la dreapta și vectori proprii la stânga	41
5.5.2 Reducerea la problema standard de valori proprii	42
5.5.3 Diagrame Campbell și diagrame de stabilitate	43
5.6 Răspunsul la dezechilibru	47
5.6.1 Rezolvarea prin analiză modală	47
5.6.2 Rezolvarea prin analiză spectrală	48
5.7 Cinematica mișcării eliptice	49
5.7.1 Orbitele eliptice	49
5.7.2 Descompunerea în mișcări circulare directă și inversă	52
5.7.3 Viteza unghiulară variabilă în lungul elipsei	54
5.8 Reducerea ordinului modelului	56

5.8.1	Condensarea modelului	56
5.8.2	Substructurarea modelului	62
5.8.3	Metode de reducere pas cu pas a modelului	68
	Bibliografie	76
6.	Lagăre hidrodinamice și etanșări	77
6.1	Lagăre hidrodinamice	77
6.2	Caracteristici statice ale lagărelor hidrodinamice	78
6.2.1	Geometria unui lagăr circular cu cuzinet complet	79
6.2.2	Poziția de echilibru a centrului fusului în lagăr	80
6.3	Coeficienții dinamici ai lagărelor hidrodinamice	83
6.4	Ecuția lui Reynolds și condițiile la limită	84
6.4.1	Ipoteze generale	86
6.4.2	Ecuția lui Reynolds	87
6.4.3	Condiții la limită pentru câmpul de presiuni în filmul fluid	89
6.5	Soluții analitice ale ecuației lui Reynolds	90
6.5.1	Soluția pentru lagăre scurte (Ocvirk)	90
6.5.2	Soluția pentru lagăre de lungime infinită (Sommerfeld)	99
6.5.3	Soluția pentru lagăre cavitare de lungime finită (Moes)	99
6.6	Semnificația fizică a coeficienților dinamici ai lagărelor	103
6.7	Temperatura lagărelor	107
6.7.1	Temperatura aproximativă a unui lagăr	108
6.7.2	Relația vâscozitate-temperatură	109
6.8	Lagăre radiale hidrodinamice	112
6.8.1	Lagăre circulare cu cuzinet complet	112
6.8.2	Lagăre cu canale axiale	112
6.8.3	Lagăre cu treaptă de presiune	114
6.8.4	Lagăre din două jumătăți decalate	116
6.8.5	Lagăre cu lobi ficși	117
6.8.6	Lagăre cu segmenti oscilanți	124
6.8.7	Lagăre cu treaptă Rayleigh	128
6.8.8	Lagăre cu bucsă flotantă (inel intermediar)	129
6.9	Amortizoare cu lubrifianț expulzat (squeeze film)	130
6.9.1	Principiul de bază	130

6.9.2 Soluții constructive de amortizoare cu squeeze film	132
6.9.3 Coeficienții de rigiditate și de amortizare ai squeeze filmului	133
6.9.4 Proiectarea unui amortizor cu squeeze film	135
6.10 Etanșări inelare cu lichid	137
6.10.1 Reacțiunea hidrostatică. Efectul Lomakin	138
6.10.2 Coeficienții dinamici ai unei etanșări inelare cu lichid	139
6.10.3 Considerații finale asupra etanșărilor cu lichid	146
6.11 Etanșări inelare cu gaz	147
6.12 Etanșări cu contact flotant	150
6.12.1 Caracteristici constructive	151
6.12.2 Blocarea inelului de etanșare	154
6.12.3 Coeficienții dinamici ai unei etanșări blocate	155
Bibliografie	159
7. Instabilitatea precesiei rotoarelor	161
7.1 Precesia instabilă a arborilor în rotație	161
7.2 Instabilitatea datorită amortizării rotative	164
7.2.1 Modelul plan al unui rotor	165
7.2.2 Efectul calitativ al amortizării	166
7.2.3 Turația la limita de stabilitate a rotoarelor cu amortizare rotativă	168
7.2.4 Efecte cantitative ale amortizării	172
7.3 Precesia instabilă în lagăre hidrodinamice	173
7.3.1 Fenomenele “oil-whirl” și “oil-whip”	174
7.3.2 Precesia de semi-frecvență	176
7.3.3 Turația de apariție a instabilității	178
7.3.4 Explicația lui Crandall privind instabilitatea lagărelor autoportante	179
7.3.5 Stabilitatea sistemelor liniare	187
7.3.6 Instabilitatea unui rotor rigid simplu	189
7.3.7 Instabilitatea unui rotor elastic simplu	194
7.3.8 Instabilitatea rotoarelor elastice complexe	199
7.4 Interacțiunea cu forțele produse de curgerea fluidului	199
7.4.1 Instabilitatea datorită curgerii aburului la capetele paletelor	199
7.4.2 Interacțiunea roată-difuzor	201

7.5	Precesia inversă datorită frecării uscate	203
7.5.1	Contactul cu frecare între rotor și stator	203
7.5.2	Precesia instabilă datorită frecării uscate	204
7.6	Instabilitatea datorită factorilor asimetrici	206
7.6.1	Excitația parametrică	207
7.6.2	Anizotropia arborelui	207
7.6.3	Distribuția axial asimetrică a masei	219
7.6.4	Analiza cu elemente finite a rotoarelor axial asimetrice	226
	Bibliografie	229
	Index	233

5.

ANALIZA CU ELEMENTE FINITE A SISTEMELOR ROTOR-LAGĂRE

În acest capitol se expune baza teoretică a analizei cu elemente finite a sistemelor rotor-lagăre-etanșări. Se calculează matricile de masă, de rigiditate și giroscopice pentru discuri rigide axial-simetrice și pentru tronsoane de arbore axial-simetrice cu secțiunea constantă. Etanșările, amortizoarele și cuplajele sunt modelate prin matrici corespunzătoare. Se stabilesc vectorii excitației în cazul rotirii cu viteză unghiulară constantă. Se prezintă metode de reducere a ordinului modelului cu elemente finite.

5.1 Modelarea componentelor unui rotor

În vederea predicției analitice a răspunsului dinamic al unui rotor, trebuie identificate și modelate principalele componente ale mașinii rotative.

Sistemul real (fig. 5.1, *a*) este înlocuit printr-un model fizic (fig. 5.1, *b*), de obicei un model cu parametri concentrați, care include: a) tronsoane de arbore (Bernoulli/Timoshenko, cilindrice/conice); b) lagăre (izotrope/ortotrope, neamortizate/amortizate); c) discuri (rigide/flexibile, subțiri/groase); d) roți centrifuge (impulsoare); e) etanșări; f) amortizoare cu film expulzat (squeeze-film); g) cuplaje; h) piedestaluri (plus structura de suport) și i) fundația.

Pentru fiecare element component al sistemului se stabilesc apoi ecuațiile de mișcare (echilibru dinamic) conforme cu ipotezele de modelare.

În continuare, se deduc matricile de masă, de rigiditate și giroscopice pentru discuri circulare și tronsoane de arbore axial-simetrice, pornind de la expresiile energiilor cinetică și potențială, utilizând ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1, a)$$

în care T – energia cinetică, U – energia potențială, q_i – deplasarea generalizată, \dot{q}_i – viteza generalizată și Q_i – forța generalizată. Analiza răspunsului dinamic al rotoarelor nesimetrice depășește scopul acestei prezentări introductive.

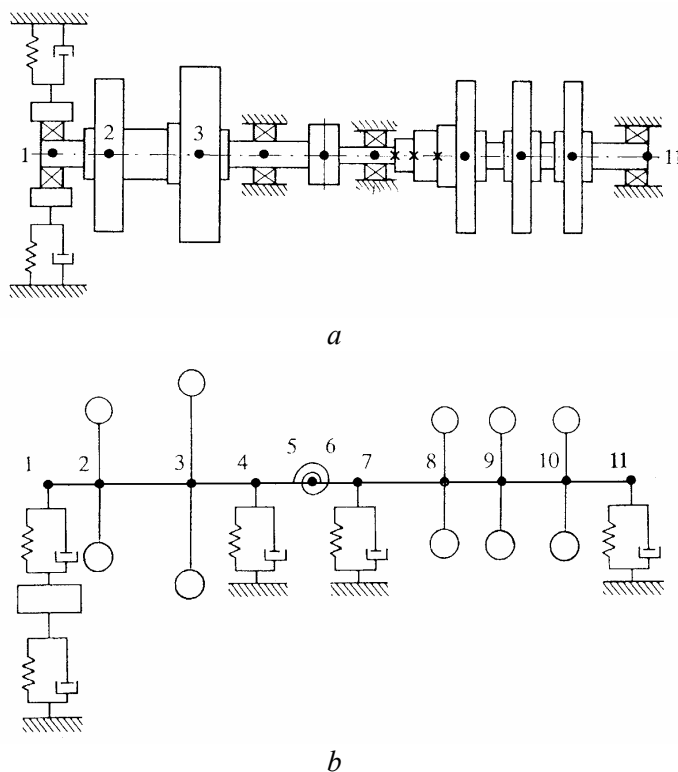


Fig. 5.1 [5.1]

Forțele generalizate se calculează identificând fizic un set de coordonate generalizate și exprimând lucrul mecanic virtual sub forma

$$\delta W = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k . \quad (5.1, b)$$

La arbori axial-simetrice se consideră inerția la rotirea secțiunii transversale și deformațiile de forfecare, și se neglijează amortizarea externă și cea internă. Lagărele sunt înlocuite prin modele liniarizate, descrise de matrici de rigiditate și de amortizare în general nesimetrice. Vectorii forțelor produse de dezechilibrul masic se calculează la turație constantă.

Cu ajutorul acestor matrici și vectori se stabilesc ecuațiile de mișcare în coordonate staționare (fixe în spațiu). Rezultatele analizei valorilor proprii și a răspunsului la dezechilibru se prezintă într-o formă adecvată analizei ingineresti.

5.2. Cinematica precesiei solidului rigid

Pentru a scrie ecuațiile de mișcare ale unui disc rigid, montat pe un arbore elastic, întâi trebuie determinate componentele vitezei sale unghiulare.

5.2.1 Triedre de referință

Analiza se face în raport cu două triedre de referință: X, Y, Z – un triedru inerțial și x, y, z – un triedru care se rotește odată cu rotorul (fig. 5.2). Analiza se limitează la cazul în care discul se rotește cu viteză unghiulară constantă Ω (rad/s) în jurul axei de rotație Ox .

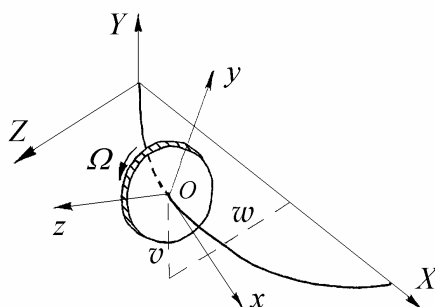


Fig. 5.2

5.2.2 Precesia discului rigid

În figura 5.3 se arată două tipuri de mișcări posibile ale unui disc rigid.

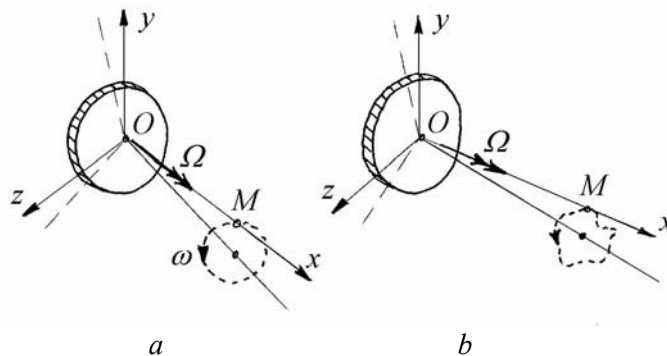


Fig. 5.3

Mișcarea în care axa Ox trasează în spațiu un con (fig. 5.3, *a*), cu viteza unghiulară ω , se numește *precesie*, când punctul M se deplasează în lungul unei orbite închise, și *whirling* când acesta se mișcă în lungul unei orbite în spirală. În precesia *directă* (*forward*) $\omega/\Omega > 0$, în timp ce în precesia *inversă* (*backward*) $\omega/\Omega < 0$. În precesia *sincronă* $\omega = \Omega$. În unele lucrări, termenul *precesie* este înlocuit prin *whirling* (tradus impropriu “mișcare în vârtej”).

Fluctuațiile unghiului la vârf al conului, suprapuse precesiei (fig. 5.3, *b*) definesc mișcarea de *nutație*. Aceasta nu apare în majoritatea sistemelor liniare.

5.2.3 Mișcările unghiulare ale axei de rotație

Mișcarea relativă a triedrului x,y,z față de triedrul fix X,Y,Z poate fi descrisă prin trei unghiuri θ , φ și ψ (fig. 5.4), care definesc *trei* rotiri succesive. *Ordinea* acestora *este importantă*, deoarece rotirile nu sunt comutative. În continuare, prima rotire se face față de axa transversală care urmează axei de rotație conform regulii triedrului drept.

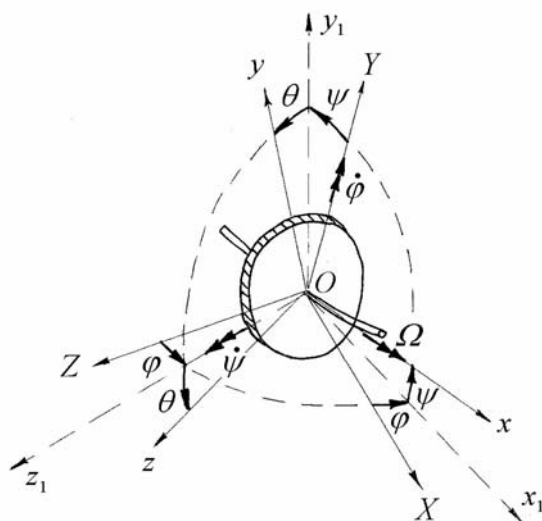


Fig. 5.4

Se presupune că φ și ψ sunt unghiuri de precesie mici, în timp ce $\theta = \Omega t$, unde viteza unghiulară de rotație a discului $\Omega = \text{const.}$

Se consideră următoarea secvență de rotiri [5.2]:

a) o rotire φ în jurul axei Y , care deplasează axa Z în poziția z_1 și axa X în poziția x_1 ; triedrul X,Y,Z devine triedrul x_1,Y,z_1 ;

b) o rotație ψ în jurul axei z_1 care deplasează axa Y în poziția y_1 și axa x_1 în poziția x ; triedrul x_1, Y, z_1 devine triedrul x, y_1, z_1 ;

c) o rotație θ în jurul axei Ox : triedrul x, y_1, z_1 devine triedrul x, y, z .

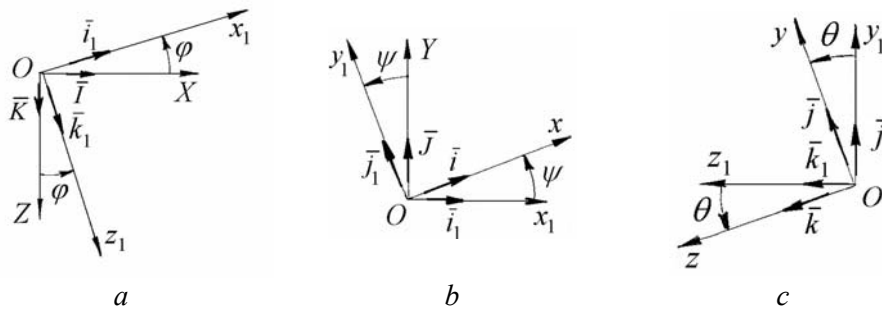


Fig. 5.5

Axele X, Y, Z au versorii $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$, axele x_1, y_1, z_1 au versorii $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$, iar axele x, y, z au versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

a) Rotirea φ (viteza unghiulară $\dot{\varphi}$ față de OY) (fig. 5.5, a)

Relația între versori este

$$\begin{Bmatrix} \bar{I} \\ \bar{K} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix}.$$

În formă expandată

$$\begin{Bmatrix} \bar{I} \\ \bar{J} \\ \bar{K} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{J} \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix} = [T_\varphi] \begin{Bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{J} \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix}.$$

b) Rotirea ψ (viteza unghiulară $\dot{\psi}$ față de Oz_1) (fig. 5.5, b)

Relația între versori este

$$\begin{Bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{J} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j}_1 \end{Bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & -\psi \\ \psi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j}_1 \end{Bmatrix}.$$

În formă expandată

$$\begin{Bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{J} \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & 0 \\ \psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix} = [T_\psi] \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix}.$$

c) Rotația θ (viteza unghiulară $\dot{\theta} = \Omega$ față de Ox) (fig. 5.5, c)

Relația între versori este

$$\begin{Bmatrix} \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{j} \\ \bar{k} \end{Bmatrix}.$$

În formă expandată

$$\begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{Bmatrix} = [T_\theta] \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{Bmatrix}.$$

Relația între versorii din triedrele fix și rotitor are forma

$$\begin{Bmatrix} \bar{I} \\ \bar{J} \\ \bar{K} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{Bmatrix},$$

unde matricea de transformare

$$[T] = [T_\varphi][T_\psi][T_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \sin\theta - \psi \cos\theta & \varphi \cos\theta + \psi \sin\theta \\ \psi & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\varphi & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Vectorul vitezei unghiulare instantanee este

$$\bar{\omega} = \Omega \bar{i} + \dot{\varphi} \bar{J} + \dot{\psi} \bar{k}_1.$$

În funcție de versorii sistemului de coordonate x, y, z

$$\bar{J} = \psi \bar{i} + \cos\theta \bar{j} - \sin\theta \bar{k},$$

$$\bar{k}_1 = \sin\theta \bar{j} + \cos\theta \bar{k},$$

astfel încât

$$\bar{\omega} = (\Omega + \dot{\varphi} \psi) \bar{i} + (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} \sin\theta) \bar{j} + (\dot{\psi} \cos\theta - \dot{\varphi} \sin\theta) \bar{k}.$$

Componentele vitezei unghiulare față de triedrul de referință (mobil) atașat rotorului x, y, z sunt

$$\begin{cases} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{cases} = \begin{cases} \Omega + \dot{\varphi}\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}\sin\theta \end{cases}. \quad (5.2)$$

Acestea vor fi utilizate în expresia energiei cinetice a unui disc.

5.3 Ecuțiile de mișcare ale componentelor unui rotor

În acest paragraf se stabilesc ecuațiile de mișcare ale discurilor, porțiunilor de arbore, lagărelor, etanșărilor și cuplajelor, precum și matricile elementelor finite corespunzătoare.

5.3.1 Discuri subțiri

În continuare, se analizează doar rotoare (deci discuri) axial-simetrice și se consideră că x, y, z sunt direcții principale de inerție.

5.3.1.1 Matricile de masă și giroscopică ale unui disc rigid subțire

Poziția unui disc față de triedrul fix X, Y, Z este definită prin două translații (v și w) și două rotații (φ și ψ), deplasările secțiunii transversale a arborelui în punctul de atașare a discului (fig. 5.6, *a*). Unghiurile φ și ψ sunt aproximativ egale cu deplasările unghiulare definite de vectori coliniari cu axele Y , respectiv Z .

Neglijând orice dezechilibru, energia cinetică a unui disc rigid axial-simetric este

$$T^d = \frac{1}{2} m_d (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2), \quad (5.3)$$

unde $J_x = J_P$ și $J_y = J_z = J_T$ sunt momentele de inerție masice principale în raport cu triedrul x, y, z fixat de disc, m_d este masa discului, J_P este momentul de inerție masic axial (polar) și J_T este momentul de inerție masic diametral.

Înlocuind ω_x , ω_y , ω_z din (5.2) în (5.3), energia cinetică se scrie

$$\begin{aligned} T^d = & \frac{1}{2} m_d (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} J_P (\Omega + \dot{\varphi}\psi)^2 + \\ & + \frac{1}{2} J_T [(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\sin\theta)^2 + (\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}\sin\theta)^2] \end{aligned}$$

sau

$$T^d = \frac{1}{2} m_d (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} J_P (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\phi}^2\dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} J_T (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2).$$

Neglijând termenul $\frac{1}{2} J_P \dot{\phi}^2 \dot{\psi}^2$, energia cinetică devine

$$T^d = \frac{1}{2} m_d (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} J_T (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) + J_P \Omega \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{1}{2} J_P \Omega^2. \quad (5.4)$$

În expresia (5.4), termenul $\frac{1}{2} m_d (\dot{v}^2 + \dot{w}^2)$ reprezintă energia de translație, $\frac{1}{2} J_T (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2)$ - energia de rotație transversală, $J_P \Omega \dot{\phi} \dot{\psi}$ - energia datorită cuplajului giroscopic și $\frac{1}{2} J_P \Omega^2$ - energia de rotație în jurul axei de rotație.

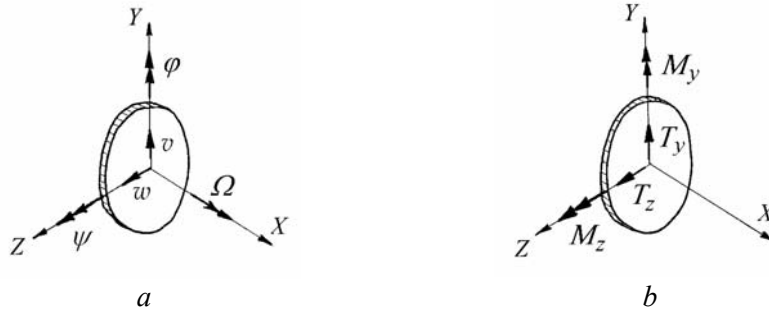


Fig. 5.6

Utilizând ecuațiile lui Lagrange, ecuațiile de mișcare ale unui disc circular rigid se obțin sub forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^d}{\partial \dot{v}} \right) = m_d \ddot{v} = T_y, \quad (5.5, a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^d}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T^d}{\partial \psi} = J_T \ddot{\psi} - \Omega J_P \dot{\phi} = M_z, \quad (5.5, b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^d}{\partial \dot{w}} \right) = m_d \ddot{w} = T_z, \quad (5.5, c)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T^d}{\partial (-\dot{\phi})} \right] = J_T (-\ddot{\phi}) - \Omega J_P \dot{\psi} = -M_y, \quad (5.5, d)$$

$$\frac{\partial T^d}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial T^d}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial T^d}{\partial (-\phi)} = 0,$$

în care T_y , T_z și M_y , M_z sunt componentele forței aplicate, respectiv ale momentului aplicat (fig. 5.6, b).

În formă matricială

$$\begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{w} \\ -\ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_P \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ -\dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_y \\ M_z \\ T_z \\ -M_y \end{Bmatrix}. \quad (5.5)$$

Introducând vectorii de stare (de dimensiuni 2×1) ai deplasărilor din planele $X-Y$, respectiv $X-Z$,

$$\{u_y^d\} = \begin{Bmatrix} v \\ \psi \end{Bmatrix}, \quad \{u_z^d\} = \begin{Bmatrix} w \\ -\phi \end{Bmatrix},$$

și vectorii corespunzători ai forțelor și momentelor aplicate discului

$$\{f_y^d\} = \begin{Bmatrix} T_y \\ M_z \end{Bmatrix}, \quad \{f_z^d\} = \begin{Bmatrix} T_z \\ -M_y \end{Bmatrix},$$

ecuația (5.5) se poate scrie sub forma partiționată

$$\begin{bmatrix} [m^d] & [0] \\ [0] & [m^d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_y^d\} \\ \{\ddot{u}_z^d\} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} [0] & [g^d] \\ -[g^d] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}_y^d\} \\ \{\dot{u}_z^d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_y^d\} \\ \{f_z^d\} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

în care membrul drept poate include forțe datorite dezechilibrului masic și unghiular, forțe de interconectare și alte forțe exterioare aplicate discului.

Submatricile

$$[m^d] = \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & J_T \end{bmatrix}, \quad [g^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_P \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

reprezintă matricile de masă și giroscopică ale unui disc rigid axial-simetric.

5.3.1.2 Vectorii forțelor de dezechilibru

Pentru analiza răspunsului sincron al unui sistem rotor, trebuie determinați vectorul dezechilibrului masic și vectorul dezaxării unghiulare statice ai unui disc rigid.

Vectorul dezechilibrului masic

Se consideră discul din figura 5.7, *a*. Centrul de greutate G al discului este la o distanță $\overline{CG} = a$ de centrul geometric C . Față de triedrul în rotație x, y, z , coordonatele sunt $a_c = a \cos \alpha$, $a_s = a \sin \alpha$ (fig. 5.7, *b*). La momentul $t = 0$, α este unghiul segmentului \overline{CG} cu axa Y .

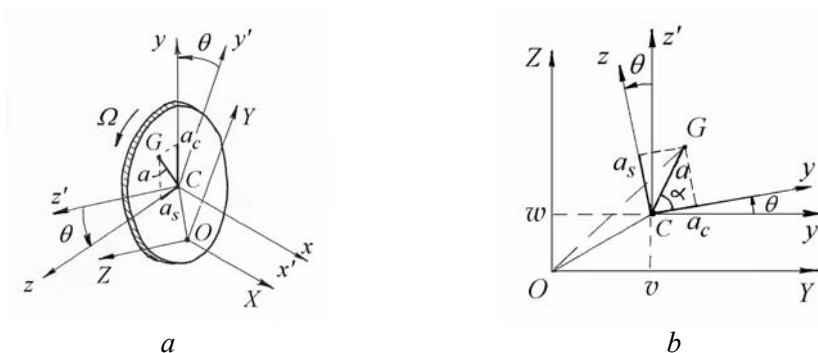


Fig. 5.7

Forța centrifugă neechilibrată care acționează în punctul G în direcția \overline{CG} este $m_d a \Omega^2$. Componentele acesteia pe axele triedrului fixat de rotor sunt $m_d a_c \Omega^2$ și $m_d a_s \Omega^2$, iar cele în lungul axelor triedrului fix (inerțial) au expresiile

$$\begin{aligned} f_y &= m_d a_c \Omega^2 \cos \Omega t - m_d a_s \Omega^2 \sin \Omega t, \\ f_z &= m_d a_s \Omega^2 \cos \Omega t + m_d a_c \Omega^2 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Vectorul forțelor produse de dezechilibrul masic (neglijând montarea oblică a discului) se poate scrie sub forma

$$\{f^d\} = \left\{ \begin{Bmatrix} f_y^d \\ f_z^d \end{Bmatrix} \right\} = m_d \begin{Bmatrix} a_c \Omega^2 \\ 0 \\ a_s \Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \Omega t + m_d \begin{Bmatrix} -a_s \Omega^2 \\ 0 \\ a_c \Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \Omega t. \quad (5.9)$$

Vectorul înclinării permanente a discului

Asupra unui disc montat oblic pe arbore acționează cupluri giroscopice care produc rotații ale discului la fel cum forțele centrifuge datorite dezechilibrului masic produc deplasări de translație.

Se consideră un disc rigid (fig. 5.8, *a*) care nu este montat perpendicular pe arbore. Între o axă principală de inerție a discului și axa arborelui există o dezaxare unghiulară statică τ .

Oblicitatea discului poate fi definită de un vector rotitor τ , perpendicular pe axa de rotație și pe linia de înclinare maximă. La $t = 0$ vectorul τ face un unghi β cu axa rotitoare z , astfel încât vectorul oblicității discului are componentele $\tau_c = \tau \cos\beta$ și $\tau_s = \tau \sin\beta$ în triedrul rotitor x, y, z (v. și relația (2.84) în Cap. 2).

Componentele deplasării unghiulare (fig. 5.8, b) devin

$$\begin{aligned}\alpha_y &= \varphi - \tau \sin(\Omega t + \beta), \\ \alpha_z &= \psi + \tau \cos(\Omega t + \beta),\end{aligned}$$

unde φ și ψ sunt rotații elastice.

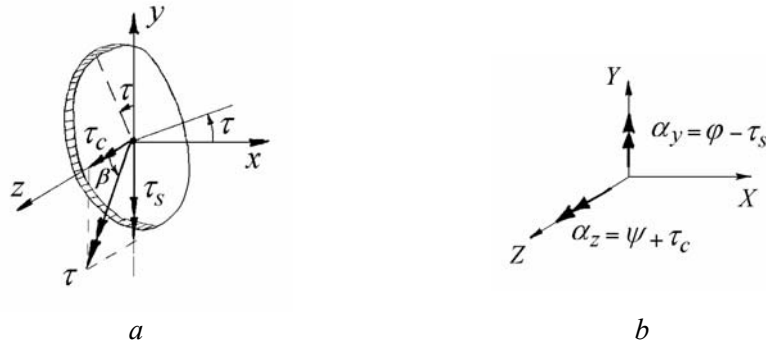


Fig. 5.8

Vitezele unghiulare corespunzătoare și accelerațiile sunt

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_y &= \dot{\varphi} - \Omega \tau \cos(\Omega t + \beta), & \ddot{\alpha}_y &= \ddot{\varphi} + \Omega^2 \tau \sin(\Omega t + \beta), \\ \dot{\alpha}_z &= \dot{\psi} - \Omega \tau \sin(\Omega t + \beta), & \ddot{\alpha}_z &= \ddot{\psi} - \Omega^2 \tau \cos(\Omega t + \beta).\end{aligned}\quad (5.10)$$

Din ecuațiile (5.5, b) și (5.5, d), înlocuind φ prin α_y și ψ prin α_z , se obține

$$\begin{aligned}J_T \ddot{\alpha}_z + \Omega J_P (-\dot{\alpha}_y) &= M_z, \\ J_T (-\ddot{\alpha}_y) - \Omega J_P \dot{\alpha}_z &= -M_y.\end{aligned}$$

Înlocuind (5.10) rezultă

$$\begin{aligned}M_z &= J_T \ddot{\psi} - J_P \Omega \dot{\varphi} + (J_P - J_T) \Omega^2 \tau \cos(\Omega t + \beta), \\ -M_y &= J_T (-\ddot{\varphi}) - J_P \Omega \dot{\psi} + (J_P - J_T) \Omega^2 \tau \sin(\Omega t + \beta).\end{aligned}$$

Vectorul momentelor giroscopice care acționează asupra discului este

$$\begin{Bmatrix} M_z \\ -M_y \end{Bmatrix} = (J_T - J_P) \Omega^2 \left(\begin{Bmatrix} \tau \cos\beta \\ \tau \sin\beta \end{Bmatrix} \cos\Omega t + \begin{Bmatrix} -\tau \sin\beta \\ \tau \cos\beta \end{Bmatrix} \sin\Omega t \right). \quad (5.11)$$

Vectorul forțelor și momentelor de dezechilibru este

$$\{f^d\} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} m_d a_c \\ (J_T - J_P)\tau_c \\ m_d a_s \\ (J_T - J_P)\tau_s \end{Bmatrix} \cos \Omega t + \Omega^2 \begin{Bmatrix} -m_d a_s \\ -(J_T - J_P)\tau_s \\ m_d a_c \\ (J_T - J_P)\tau_c \end{Bmatrix} \sin \Omega t. \quad (5.12)$$

Diferența momentelor de inerție $J_T - J_P$ poate fi negativă (disc subțire) sau pozitivă (disc gros). Când $J_T - J_P < 0$, momentul aplicat este de readucere, rotind discul subțire în sens contrar înclinării inițiale. Când $J_T - J_P > 0$, momentul aplicat mărește dezechilibrul unghiular, rotind discul gros în sensul înclinării inițiale.

5.3.1.3 Discuri deformabile

Un disc elastic poate fi modelat cu două discuri rigide interconectate prin arcuri de rotație cu rigiditatea k_R (fig. 5.9).

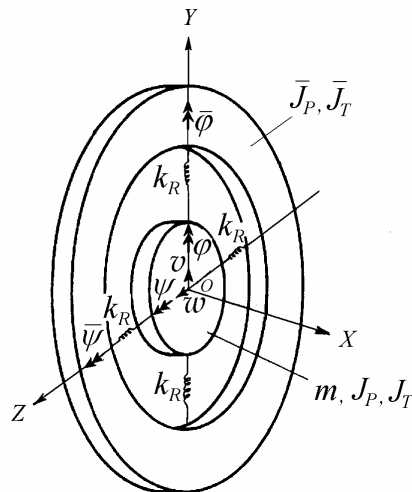


Fig. 5.9

Discul interior are patru grade de libertate, două translații v , w , și două rotații φ , ψ . Proprietățile inerțiale sunt m , J_P , J_T . Discul exterior are doar două grade de libertate, rotațiile $\bar{\varphi}$ și $\bar{\psi}$. Acesta e definit doar prin momentele de inerție masice polar \bar{J}_P și diametral \bar{J}_T . Masa acestuia este concentrată în discul interior.

Matricile corespunzătoare de dimensiuni 6×6 [5.1] pot fi reduse la matrici de dimensiuni 4×4 prin condensare statică, alegând coordonatele discului interior drept "active" și cele ale discului exterior ca "omise" (v. § 5.8.1.2).

5.3.2 Elemente de arbore cu secțiunea constantă

Porțiunile de arbore se consideră izotrope și axial-simetrice. Prezentarea se limitează la elemente cu secțiunea transversală constantă.

5.3.2.1 Elemente de grindă Timoshenko și elemente Bernoulli-Euler

Se consideră un element de arbore cu două noduri (fig. 5.10) modelat ca un element de grindă Bresse-Timoshenko cu secțiunea constantă.

Se omite indicele elementului și se notează: ℓ - lungimea elementului, E - modulul de elasticitate longitudinal, G - modulul de elasticitate transversal, EI - rigiditatea la încovoiere, GA_s - rigiditatea efectivă la forfecare, A_s - aria de forfecare redusă, χ - coeficientul de forfecare, ρ - densitatea materialului, $\mu = \rho A$ masa pe unitatea de lungime, I - momentul de inerție axial al secțiunii transversale, $\hat{\mu} = \rho I$ masa în mișcare unghiulară, pe unitatea de lungime.

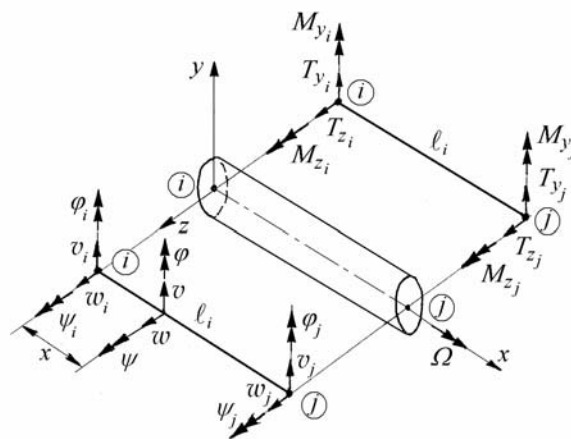


Fig. 5.10

Într-un nod oarecare, arborele are patru grade libertate, două deplasări transversale v și w , și două rotații ψ și φ , măsurate în sistemul de coordonate fix. Se definesc doi subvectori ai deplasărilor nodale în planele X - Y și X - Z

$$\left\{ u_y^s \right\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \psi_i \\ v_j \\ \psi_j \end{Bmatrix}, \quad \left\{ u_z^s \right\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\varphi_i \\ w_j \\ -\varphi_j \end{Bmatrix}, \quad (5.13, a)$$

și vectorii corespunzători ai forțelor nodale

$$\left\{ f_y^s \right\} = \begin{Bmatrix} T_{yi} \\ M_{zi} \\ T_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix}, \quad \left\{ f_z^s \right\} = \begin{Bmatrix} T_{zi} \\ -M_{yi} \\ T_{zj} \\ -M_{yj} \end{Bmatrix}. \quad (5.13, b)$$

Rotirile și momentele față de axa Y sunt negative conform regulii burghiului drept. În lucrare se utilizează următoarea convenție de semne: *forțele interioare pozitive acționează în sensul pozitiv (negativ) al coordonatelor în secțiunile transversale ale arborelui cu normala exterioară pozitivă (negativă)*.

În teoria de grindă Bernoulli-Euler, se neglijează deformațiile produse de forfecare. Teoria grinzilor Bresse-Timoshenko se bazează pe următoarele ipoteze: a) secțiunile transversale plane rămân nedeformate și plane; b) se neglijează deplanarea; și c) se consideră o lunecare specifică medie constantă pe toată secțiunea, deci independentă de distanța la axa transversală.

Ipoteza secțiunii plane introduce o rigiditate adițională falsă la deplanare. În unele puncte, distorsiunile produse de forfecare sunt subestimate. Expresia forței tăietoare T este incorectă. Soluția constă în utilizarea unei “arii efective de forfecare” $A_s < A$. Din considerații energetice

$$\frac{1}{2} \int_{\ell} \left(\int_A \frac{\tau^2}{G} dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\ell} \frac{T^2}{GA_s} dx,$$

astfel încât

$$A_s = \frac{\left(\int \tau dA \right)^2}{\int \tau^2 dA} = \chi A.$$

Pentru un arbore din oțel cu gaură centrală, cu diametrul exterior D și diametrul interior d , coeficientul de forfecare este

$$\chi = \frac{1}{1.13 + 3.03 \left[\frac{d/D}{1 + (d/D)^2} \right]^2}.$$

Ecuțiile în planul X-Y

Într-un punct oarecare al secțiunii transversale a arborelui, deplasarea axială este proporțională cu distanța față de axa neutră

$$u = -\psi y.$$

Lunecarea specifică medie (fig. 5.11) este

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\psi + v'.$$

Alungirea specifică axială este

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y\psi'.$$

Momentul încovoietor este

$$M_z = -\int_A \sigma_x y \, dA = EI_z \psi'.$$

Ecuțiile în planul X - Y sunt prezentate în Tabelul 5.1.

Neglijând termenul $\hat{\mu}\ddot{\psi}$, se stabilește o relație statică între v' și ψ

$$v' = \psi - \frac{EI_z}{GA_s} \psi'', \quad (5.14)$$

deși, la o grindă Bresse-Timoshenko, v și ψ sunt cinematic independente.

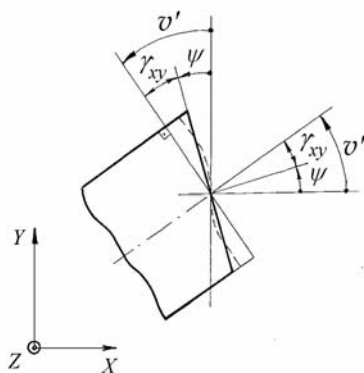


Fig. 5.11

Introducând variabila adimensională

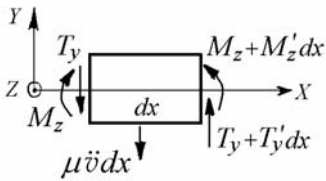
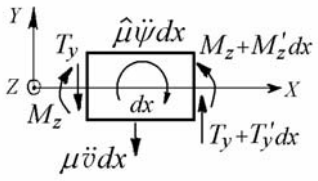
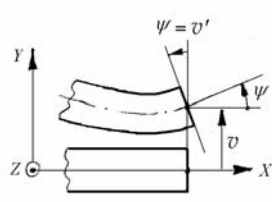
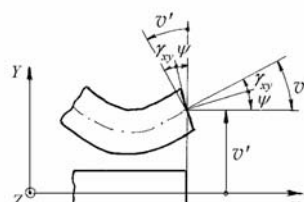
$$\xi = \frac{x}{\ell},$$

astfel încât

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\ell} \frac{d}{d\xi},$$

relația statică între v' și ψ devine [5.3]

Tabelul 5.1

Grinda Bernoulli-Euler	Grinda Bresse-Timoshenko
a) Echilibrul	
 $M'_z + T_y = 0,$ $-T'_y + \mu \ddot{v} = 0.$	 $M'_z + T_y - \hat{\mu} \ddot{\psi} = 0,$ $-T'_y + \mu \ddot{v} = 0.$
b) Eforturile interioare	
$M_z = EI_z \kappa_{xy}$	$M_z = EI_z \kappa_{xy},$ $T_y = GA_s \gamma_{xy}.$
c) Cinematica	
 $\kappa_{xy} = \psi',$ $0 = v' - \psi.$	 $\kappa_{xy} = \psi',$ $\gamma_{xy} = v' - \psi.$
<p style="text-align: center;">Eliminarea lui κ_{xy}</p> $M_z = EI_z \psi' = EI_z v''$	<p style="text-align: center;">Eliminarea lui κ_{xy} și γ_{xy}</p> $M_z = EI_z \psi',$ $T_y = GA_s (v' - \psi)$
Ecuațiile de mișcare	
<p style="text-align: center;">Eliminarea lui M_z și T_y</p> $EI_z v'^v + \mu \ddot{v} = 0$	<p style="text-align: center;">Eliminarea lui M_z și T_y</p> $EI_z \psi'' - GA_s (\psi - v') - \hat{\mu} \ddot{\psi} = 0,$ $GA_s (\psi' - v'') + \mu \ddot{v} = 0.$

$$\frac{1}{\ell} \frac{dv}{d\xi} = \psi - \frac{\kappa}{12} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \quad (5.14, a)$$

unde

$$\kappa = 12 \frac{EI_z}{GA_s \ell^2}. \quad (5.15)$$

Ecuțiile în planul X-Z

Deplasarea axială într-un punct oarecare al secțiunii transversale este

$$u = \varphi z.$$

Lunecarea specifică medie (fig. 5.12) are expresia

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi + w'.$$

Alungirea specifică axială este

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\varphi'.$$

Momentul încovoietor este

$$M_y = - \int_A \sigma_x z \, dA = EI_y \varphi'.$$

Ecuțiile în planul X-Z sunt prezentate în Tabelul 5.2.

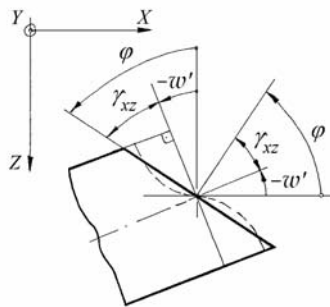
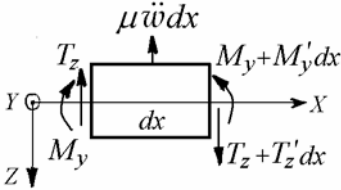
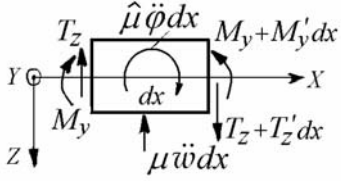
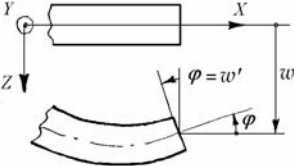
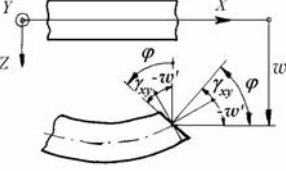


Fig. 5.12

Neglijând termenul $\hat{\mu}\ddot{\varphi}$, cuplajul “static” între w' și φ este dat de

$$w' = -\varphi + \frac{EI_y}{GA_s} \varphi'' = (-\varphi) - \frac{EI_y}{GA_s} (-\varphi)'' \quad (5.16)$$

Tabelul 5.2

Grinda Bernoulli-Euler	Grinda Bresse-Timoshenko
a) Echilibrul	
 $M'_y + T_z = 0,$ $T'_z - \mu \ddot{w} = 0.$	 $M'_y + T_z - \hat{\mu} \dot{\phi} = 0,$ $T'_z - \mu \ddot{w} = 0.$
b) Eforturile interioare	
$M_y = EI_y \kappa_{xz}$	$M_y = EI_y \kappa_{xz},$ $T_z = GA_s \gamma_{xz}.$
c) Cinematica	
 $\kappa_{xz} = \phi',$ $\phi = -w'.$	 $\kappa_{xz} = \phi',$ $\gamma_{xz} = \phi + w'.$
<p style="text-align: center;">Eliminarea lui κ_{xz}</p> $M_y = EI_y \phi' = -EI_y w''$	<p style="text-align: center;">Eliminarea lui κ_{xz} și γ_{xz}</p> $M_y = EI_y \phi',$ $T_z = GA_s (\phi + w')$
Ecuațiile de mișcare	
<p style="text-align: center;">Eliminarea lui M_y și T_z</p> $EI_y w^{iv} + \mu \ddot{w} = 0$	<p style="text-align: center;">Eliminarea lui M_y și T_z</p> $EI_y \phi'' - GA_s (\phi + w') - \hat{\mu} \dot{\phi} = 0,$ $GA_s (\phi' + w'') - \mu \ddot{w} = 0.$

Introducând variabila adimensională

$$\xi = \frac{x}{\ell},$$

relația statică între w' și φ devine

$$\frac{1}{\ell} \frac{dw}{d\xi} = (-\varphi) - \frac{\kappa}{12} \frac{d^2(-\varphi)}{d\xi^2} \quad (5.16, a)$$

unde s-a notat

$$\kappa = 12 \frac{EI_y}{GA_s \ell^2}, \quad I_y = I_z.$$

5.3.2.2 Coordonate și funcții de formă

Funcțiile de aproximare a deplasărilor și rotațiilor în planul $X-Y$ se aleg polinoame de gradul trei

$$\begin{aligned} v(\xi) &= A_3 \xi^3 + A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0, \\ \psi(\xi) &= B_3 \xi^3 + B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0. \end{aligned}$$

Înlocuind în condiția de “cuplaj” static (5.14, a) se obține

$$\frac{1}{\ell} (3A_3 \xi^2 + 2A_2 \xi + A_1) = B_3 \xi^3 + B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0 - \frac{\kappa}{2} (6B_3 \xi + 2B_2)$$

de unde rezultă

$$B_3 = 0, \quad B_2 = \frac{3}{\ell} A_3, \quad B_1 = \frac{2}{\ell} A_2, \quad B_0 = \frac{1}{\ell} \left(A_1 + \frac{\kappa}{2} A_3 \right),$$

deci $\psi(\xi)$ este de gradul doi.

Translația v și rotația ψ se exprimă în funcție de deplasările nodale, utilizând funcțiile de formă statice:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= N_1(\xi) v_i + N_2(\xi) \psi_i + N_3(\xi) v_j + N_4(\xi) \psi_j = [N] \begin{Bmatrix} u_y^s \\ \psi_y^s \end{Bmatrix}, \\ \psi(\xi) &= \tilde{N}_1(\xi) v_i + \tilde{N}_2(\xi) \psi_i + \tilde{N}_3(\xi) v_j + \tilde{N}_4(\xi) \psi_j = [\tilde{N}] \begin{Bmatrix} u_y^s \\ \psi_y^s \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

unde vectorii linie

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4], \quad [\tilde{N}] = [\tilde{N}_1 \quad \tilde{N}_2 \quad \tilde{N}_3 \quad \tilde{N}_4].$$

În continuare, se prezintă doar calculul funcției $N_3(\xi)$. Conform proprietăților generale ale funcțiilor de formă, N_3 are o valoare egală cu 1 la coordonata 3 și se anulează la coordonatele 1, 2 și 4. Aplicând cele patru condiții la limită se obține un sistem de patru ecuații

$$v(0)=0 \rightarrow A_0=0, \quad v(\ell)=1 \rightarrow A_3\left(1-\frac{\kappa}{2}\right)+A_2=1,$$

$$\psi(0)=0 \rightarrow A_1=-\frac{\kappa}{2}A_3, \quad \psi(\ell)=0 \rightarrow 3A_3+2A_2=0,$$

prin rezolvarea căruia se determină cele patru constante

$$A_3 = -\frac{2}{1+\kappa}, \quad A_2 = \frac{3}{1+\kappa}, \quad A_1 = \frac{\kappa}{1+\kappa}, \quad A_0 = 0,$$

astfel încât

$$N_3(\xi) = \frac{1}{1+\kappa} \left(-2\xi^3 + 3\xi^2 + \kappa\xi \right).$$

Funcțiile de formă pentru deplasări, care țin cont de forfecare, sunt

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{1+\kappa} \left[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + \kappa(1-\xi) \right], \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{1+\kappa} \left[\ell \left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3 \right) + \kappa \frac{\ell}{2} \left(\xi - \xi^2 \right) \right], \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{1+\kappa} \left(3\xi^2 - 2\xi^3 + \kappa\xi \right), \\ N_4(\xi) &= \frac{1}{1+\kappa} \left[\ell \left(-\xi^2 + \xi^3 \right) + \kappa \frac{\ell}{2} \left(-\xi + \xi^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Pentru $\kappa=0$, funcțiile de formă de mai sus devin polinoamele hermitiene de gradul trei utilizate la grinda Bernoulli-Euler.

Funcțiile de formă pentru rotiri sunt [5.3]

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1(\xi) &= \frac{1}{1+\kappa} \left[\frac{1}{\ell} \left(6\xi^2 - 6\xi \right) \right], \\ \tilde{N}_2(\xi) &= \frac{1}{1+\kappa} \left[1 - 4\xi + 3\xi^2 + \kappa(1-\xi) \right], \\ \tilde{N}_3(\xi) &= \frac{1}{1+\kappa} \left(\frac{1}{\ell} \left(-6\xi^2 + 6\xi \right) \right), \\ \tilde{N}_4(\xi) &= \frac{1}{1+\kappa} \left(3\xi^2 - 2\xi + \kappa\xi \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pentru $\kappa=0$

$$\tilde{N}_i(\xi) = \frac{1}{\ell} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Este utilă introducerea unui al treilea set de funcții de formă definite de

$$[\hat{N}] = [\tilde{N}] - \frac{1}{\ell} \left[\frac{dN}{d\xi} \right]$$

care vor fi utilizate la stabilirea matricii de rigiditate.

Expresiile acestora sunt

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(\xi) = -\hat{N}_3(\xi) &= \frac{\kappa}{1 + \kappa} \frac{1}{\ell}, \\ \hat{N}_2(\xi) = \hat{N}_4(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{\kappa}{1 + \kappa}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Relații similare se stabilesc pentru deplasările în planul $X-Z$

$$\begin{aligned} w &= [N] \{u_z^s\}, \\ -\varphi &= [\tilde{N}] \{u_z^s\}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

datorită relației similare de cuplaj (5.16, a) între w și $-\varphi$.

5.3.2.3 Matricea de masă și matricea giroscopică

Pentru un element de arbore infinitesimal, de lungime dx , energia cinetică se obține din expresia similară (5.4) stabilită pentru un disc subțire

$$dT^s = \left[\frac{1}{2} \rho A (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} \rho I (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} \rho I_P (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\varphi} \psi) \right] dx,$$

unde

$$I_P = 2I, \quad \mu = \rho A, \quad \hat{\mu} = \rho I, \quad \hat{\mu}_P = \rho I_P = \frac{1}{\ell} J_P^s. \quad (5.22)$$

Integrând, energia cinetică a elementului de arbore are forma

$$T^s = \frac{\mu}{2} \int_0^\ell (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{\hat{\mu}}{2} \int_0^\ell (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) dx + \frac{1}{2} J_P^s \Omega^2 + \hat{\mu}_P \Omega \int_0^\ell \dot{\varphi} \psi dx.$$

a) Energia de translație este

$$T_1^s = \frac{1}{2} \mu \int_0^\ell (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx.$$

Exprimând vitezele în funcție de coordonatele nodale și funcțiile de formă

$$\dot{v} = [N] \{ \dot{u}_y^s \} = \dot{v}^T = \{ \dot{u}_y^s \}^T [N]^T,$$

$$\dot{v}^2 = \dot{v}^T \dot{v} = \{ \dot{u}_y^s \}^T [N]^T [N] \{ \dot{u}_y^s \}, \quad \dot{w}^2 = \{ \dot{u}_z^s \}^T [N]^T [N] \{ \dot{u}_z^s \},$$

această energie se poate scrie sub forma

$$T_1^s = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_y^s \}^T \underbrace{\mu \int_0^\ell [N]^T [N] dx}_{[m_T^s]} \{ \dot{u}_y^s \} + \frac{1}{2} \{ \dot{u}_z^s \}^T \underbrace{\mu \int_0^\ell [N]^T [N] dx}_{[m_z^s]} \{ \dot{u}_z^s \}.$$

Submatricea masei în translație a elementului de arbore

$$[m_T^s] = \mu \ell \int_0^1 [N(\xi)]^T [N(\xi)] d\xi \quad (5.23)$$

este aceeași în planele $X-Y$ și $X-Z$.

b) Energia de rotire este

$$T_2^s = \frac{1}{2} \hat{\mu} \int_0^\ell (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) dx.$$

Exprimând vitezele unghiulare în funcție de coordonatele nodale și funcțiile de formă

$$\dot{\psi} = [\tilde{N}] \{ \dot{u}_y^s \}, \quad \dot{\phi} = -[\tilde{N}] \{ \dot{u}_z^s \},$$

$$\dot{\psi}^2 = \{ \dot{u}_y^s \}^T [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] \{ \dot{u}_y^s \}, \quad \dot{\phi}^2 = \{ \dot{u}_z^s \}^T [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] \{ \dot{u}_z^s \},$$

această energie poate fi scrisă sub forma

$$T_2^s = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_y^s \}^T \underbrace{\hat{\mu} \int_0^\ell [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] dx}_{[m_R^s]} \{ \dot{u}_y^s \} + \frac{1}{2} \{ \dot{u}_z^s \}^T \underbrace{\hat{\mu} \int_0^\ell [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] dx}_{[m_R^s]} \{ \dot{u}_z^s \}.$$

Submatricea masei în rotire a elementului de arbore

$$\left[m_R^s \right] = \hat{\mu} \ell \int_0^1 \left[\tilde{N}(\xi) \right]^T \left[\tilde{N}(\xi) \right] d\xi \quad (5.24)$$

este aceeași în planele $X-Y$ și $X-Z$.

c) Energia corespunzătoare cuplajului giroscopic este

$$T_3^s = \hat{\mu}_P \Omega \int_0^\ell \dot{\phi} \psi dx ,$$

$$T_3^s = -\Omega \left\{ \dot{u}_z^s \right\}^T \underbrace{\hat{\mu}_P \int_0^\ell \left[\tilde{N} \right]^T \left[\tilde{N} \right] dx}_{\left[g^s \right]} \left\{ u_y^s \right\} .$$

Submatricea giroscopică a elementului de arbore este

$$\left[g^s \right] = \hat{\mu}_P \ell \int_0^1 \left[\tilde{N}(\xi) \right]^T \left[\tilde{N}(\xi) \right] d\xi = 2 \left[m_R^s \right] . \quad (5.25)$$

Energia cinetică totală a elementului de arbore cu secțiunea constantă este

$$T^s = \frac{1}{2} \left\{ \dot{u}_y^s \right\}^T \left[m^s \right] \left\{ \dot{u}_y^s \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \dot{u}_z^s \right\}^T \left[m^s \right] \left\{ \dot{u}_z^s \right\} - \Omega \left\{ \dot{u}_z^s \right\}^T \left[g^s \right] \left\{ u_y^s \right\} + \frac{1}{2} J_P^s \Omega^2$$

unde

$$\left[m^s \right] = \left[m_T^s \right] + \left[m_R^s \right] . \quad (5.26)$$

Submatricea de masă a elementului de arbore cu secțiunea constantă este

$$\left[m^s \right] = \begin{bmatrix} m_{11}^s & m_{12}^s & m_{13}^s & m_{14}^s \\ & m_{22}^s & m_{23}^s & m_{24}^s \\ & & m_{33}^s & m_{34}^s \\ \text{sim} & & & m_{44}^s \end{bmatrix} . \quad (5.27)$$

unde

$$m_{11}^s = (156 + 294\kappa + 140\kappa^2) \alpha_T + 36\alpha_R ,$$

$$m_{12}^s = (22 + 38.5\kappa + 17.5\kappa^2) \ell \alpha_T + (3 - 15\kappa) \ell \alpha_R ,$$

$$m_{13}^s = (54 + 126\kappa + 70\kappa^2) \alpha_T - 36\alpha_R ,$$

$$\begin{aligned}
m_{14}^s &= -(13 + 31.5\kappa + 17.5\kappa^2)\ell\alpha_T + (3 - 15\kappa)\ell\alpha_R, \\
m_{22}^s &= (4 + 7\kappa + 3.5\kappa^2)\ell^2\alpha_T + (4 + 5\kappa + 10\kappa^2)\ell^2\alpha_R, \\
m_{24}^s &= -(3 + 7\kappa + 3.5\kappa^2)\ell^2\alpha_T - (1 + 5\kappa - 5\kappa^2)\ell^2\alpha_R, \\
m_{23}^s &= -m_{14}^s, \quad m_{33}^s = m_{11}^s, \quad m_{34}^s = -m_{12}^s, \quad m_{44}^s = m_{22}^s, \\
\alpha_T &= \frac{\mu\ell}{420(1+\kappa)^2}, \quad \alpha_R = \frac{\hat{\mu}\ell}{30\ell^2(1+\kappa)^2}.
\end{aligned}$$

Submatricea giroscopică a elementului de arbore cu secțiunea constantă este

$$\left[g^s \right] = \begin{bmatrix} g_{11}^s & g_{12}^s & g_{13}^s & g_{14}^s \\ & g_{22}^s & g_{23}^s & g_{24}^s \\ & & g_{33}^s & g_{34}^s \\ \text{sim} & & & g_{44}^s \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

unde

$$\begin{aligned}
g_{11}^s &= 72\alpha_R, \quad g_{12}^s = 2(3 - 15\kappa)\ell\alpha_R, \quad g_{13}^s = -72\alpha_R, \\
g_{14}^s &= g_{12}^s, \quad g_{22}^s = 2(4 + 5\kappa + 10\kappa^2)\ell^2\alpha_R, \\
g_{24}^s &= -2(1 + 5\kappa - 5\kappa^2)\ell^2\alpha_R, \\
g_{23}^s &= -g_{12}^s, \quad g_{33}^s = g_{11}^s, \quad g_{34}^s = g_{23}^s, \quad g_{44}^s = g_{22}^s.
\end{aligned}$$

Înlocuind T^s în ecuațiile lui Lagrange se obține

$$\begin{bmatrix} m^s & 0 \\ 0 & m^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y^s \\ \ddot{u}_z^s \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & g^s \\ -g^s & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_y^s \\ \dot{u}_z^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y^s \\ f_z^s \end{Bmatrix}$$

sau

$$\left[M^s \right] \{ \ddot{u} \} + \Omega \left[G^s \right] \{ \dot{u} \} = \{ f^s \}, \quad (5.29)$$

unde matricea de masă $\left[M^s \right]$ de dimensiuni 8×8 este simetrică și matricea giroscopică $\left[G^s \right]$ de dimensiuni 8×8 este antisimetrică.

5.3.2.4 Matricea de rigiditate

Pentru un element infinitesimal de arbore, energia de deformație este

$$dU = \frac{1}{2} \left\{ EI \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] + GA_s (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2) \right\} dx.$$

Integrând și înlocuind lunecările specifice, se obține

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^\ell (\psi'^2 + \varphi'^2) dx + \frac{GA_s}{2} \int_0^\ell [(v' - \psi)^2 + (\varphi + w')^2] dx.$$

a) Energia de încovoiere este

$$U_1 = \frac{EI}{2} \int_0^\ell (\psi'^2 + \varphi'^2) dx = \frac{EI}{2} \int_0^\ell \psi'^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^\ell (-\varphi')^2 dx.$$

Exprimând rotirile și curburile în funcție de coordonatele nodale și funcțiile de formă

$$\psi = [\tilde{N}] \{ u_y^s \}, \quad \psi' = \frac{1}{\ell} [\tilde{N}^\circ] \{ u_y^s \},$$

unde

$$(\)^\circ = \frac{d}{d\xi} (\),$$

$$\psi'^2 = \frac{1}{\ell^2} \{ u_y^s \}^T [\tilde{N}^\circ]^T [\tilde{N}^\circ] \{ u_y^s \},$$

energia de încovoiere poate fi scrisă

$$U_1 = \frac{1}{2} \{ u_y^s \}^T \underbrace{\frac{EI}{\ell} \int_0^1 [\tilde{N}^\circ]^T [\tilde{N}^\circ] d\xi}_{[k_B^s]} \{ u_y^s \} + \frac{1}{2} \{ u_z^s \}^T \underbrace{\frac{EI}{\ell} \int_0^1 [\tilde{N}^\circ]^T [\tilde{N}^\circ] d\xi}_{[k_B^s]} \{ u_z^s \}.$$

Submatricea de rigiditate la încovoiere este

$$[k_B^s] = \frac{EI}{\ell} \int_0^1 \left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right]^T \left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right] d\xi. \quad (5.30)$$

b) Energia de forfecare este

$$U_2 = \frac{GA_s}{2} \int_0^\ell (\psi - v')^2 dx + \frac{GA_s}{2} \int_0^\ell (\varphi + w')^2 dx$$

unde

$$\psi - v' = ([\tilde{N}] - [N']) \{ u_y^s \} = \left([\tilde{N}] - \frac{1}{\ell} [N^\circ] \right) \{ u_y^s \} = [\hat{N}] \{ u_y^s \},$$

$$\varphi + w' = -(\underbrace{[\tilde{N}]}_{[N']} - \underbrace{[N']}) \{u_z^s\} = -[\hat{N}] \{u_z^s\},$$

astfel încât

$$U_2 = \frac{1}{2} \{u_y^s\}^T \underbrace{GA_s \ell \int_0^1 [\hat{N}]^T [\hat{N}] d\xi}_{[k_S^s]} \{u_y^s\} + \frac{1}{2} \{u_z^s\}^T \underbrace{GA_s \ell \int_0^1 [\hat{N}]^T [\hat{N}] d\xi}_{[k_S^s]} \{u_z^s\}.$$

Submatricea de rigiditate la forfecare este

$$[k_S^s] = GA_s \ell \int_0^1 [\hat{N}]^T [\hat{N}] d\xi. \quad (5.31)$$

Energia de deformație totală a unui element de arbore cu secțiunea constantă este

$$U = \frac{1}{2} \{u_y^s\}^T [k^s] \{u_y^s\} + \frac{1}{2} \{u_z^s\}^T [k^s] \{u_z^s\},$$

în care submatricea de rigiditate este

$$[k^s] = [k_B^s] + [k_S^s]. \quad (5.32)$$

sau

$$[k^s] = \frac{1}{1 + \kappa} \frac{EI}{\ell^3} \left[\begin{array}{cccc} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ & & 12 & -6\ell \\ \text{sym} & & & 4\ell^2 \end{array} \right] + \kappa \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ell^2 & 0 & -\ell^2 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & \ell^2 \end{array} \right].$$

Înlocuind U în ecuațiile Lagrange se obține

$$\left[\begin{array}{cc} [k^s] & [0] \\ [0] & [k^s] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{u_y^s\} \\ \{u_z^s\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{f_y^s\} \\ \{f_z^s\} \end{array} \right\}$$

sau

$$[K^s] \{u^s\} = \{f^s\},$$

unde $[K^s]$ este matricea de rigiditate de dimensiuni 8×8 a elementului de arbore cu secțiunea constantă.

5.3.2.5 Vectorii forțelor de dezechilibru

Se consideră o distribuție liniară a dezechilibrului masic în lungul elementului de arbore, între valorile a_{cL} , a_{sL} la capătul din stânga, și a_{cR} , a_{sR} la capătul din dreapta

$$\begin{aligned} a_c^s(\xi) &= a_{cL}(1-\xi) + a_{cR}\xi, \\ a_s^s(\xi) &= a_{sL}(1-\xi) + a_{sR}\xi, \end{aligned} \quad (5.33)$$

unde

$a_{cL} = a_L \cos\alpha_L$, $a_{sL} = a_L \sin\alpha_L$, $a_{cR} = a_R \cos\alpha_R$, $a_{sR} = a_R \sin\alpha_R$, a_L , a_R sunt excentricitățile dezechilibrelor, iar α_L , α_R sunt unghiurile de fază ale acestora.

Forțele de dezechilibru distribuite corespunzătoare sunt

$$p_y(\xi, t) = \mu\Omega^2 a_y^s(\xi, t), \quad p_z(\xi, t) = \mu\Omega^2 a_z^s(\xi, t),$$

unde

$$\begin{aligned} a_y^s(\xi, t) &= a_c^s(\xi) \cos \Omega t - a_s^s(\xi) \sin \Omega t, \\ a_z^s(\xi, t) &= a_s^s(\xi) \cos \Omega t + a_c^s(\xi) \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Lucrul mecanic virtual al acestor forțe este

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^\ell (\delta v)^T p_y dx + \int_0^\ell (\delta w)^T p_z dx, \\ \delta W &= \underbrace{\left\{ \delta u_y^s \right\}^T \int_0^1 [N]^T p_y \ell d\xi}_{\left\{ f_y^s \right\}} + \underbrace{\left\{ \delta u_z^s \right\}^T \int_0^1 [N]^T p_z \ell d\xi}_{\left\{ f_z^s \right\}}. \end{aligned}$$

Forțele nodale cinematic echivalente sunt

$$\left\{ f_y^s \right\} = \mu\ell\Omega^2 \int_0^1 [N]^T a_y^s d\xi, \quad \left\{ f_z^s \right\} = \mu\ell\Omega^2 \int_0^1 [N]^T a_z^s d\xi.$$

Vectorul dezechilibrului masic al arborelui are expresia

$$\left\{ \left\{ f_y^s \right\} \right\} = \mu\ell\Omega^2 \begin{pmatrix} \int_0^1 [N]^T a_c^s d\xi \\ 0 \\ \int_0^1 [N]^T a_s^s d\xi \end{pmatrix} \cos \Omega t + \mu\ell\Omega^2 \begin{pmatrix} -\int_0^1 [N]^T a_s^s d\xi \\ 0 \\ \int_0^1 [N]^T a_c^s d\xi \end{pmatrix} \sin \Omega t.$$

Un exemplu de calcul al unui termen este dat mai jos

$$\begin{aligned} \int_0^1 N_1(\xi) a_c^s d\xi &= \int_0^1 N_1(\xi) [a_{cL}(1-\xi) + a_{cR}\xi] d\xi = \\ &= a_{cL} \int_0^1 N_1(\xi)(1-\xi) d\xi + a_{cR} \int_0^1 N_1(\xi)\xi d\xi = \\ &= \frac{1}{120(1+\kappa)} [(42+40\kappa)a_{cL} + (18+20\kappa)a_{cR}]. \end{aligned}$$

Vectorul forțelor de dezechilibru poate fi scris

$$\{f^s\} = \frac{\mu l \Omega^2}{120(1+\kappa)} \left(\left\{ \begin{array}{l} [a] \begin{Bmatrix} a_{cL} \\ a_{cR} \end{Bmatrix} \\ [a] \begin{Bmatrix} a_{sL} \\ a_{sR} \end{Bmatrix} \end{array} \right\} \cos \Omega t + \left\{ \begin{array}{l} -[a] \begin{Bmatrix} a_{sL} \\ a_{sR} \end{Bmatrix} \\ [a] \begin{Bmatrix} a_{cL} \\ a_{cR} \end{Bmatrix} \end{array} \right\} \sin \Omega t \right),$$

unde

$$[a] = \begin{bmatrix} 42+40\kappa & 18+20\kappa \\ (6+5\kappa)l & (4+5\kappa)l \\ 18+20\kappa & 42+40\kappa \\ -(4+5\kappa)l & -(6+5\kappa)l \end{bmatrix},$$

astfel încât

$$\{f^s\} = \left(\left\{ \begin{array}{l} \{Q_y\} \\ \{Q_z\} \end{array} \right\} \cos \Omega t + \left\{ \begin{array}{l} -\{Q_z\} \\ \{Q_y\} \end{array} \right\} \sin \Omega t \right).$$

Vectorul forțelor de dezechilibru are forma

$$\{f^s\} = \frac{\mu l \Omega^2}{120(1+\kappa)} \left(\left\{ \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 l \\ v_3 \\ v_4 l \\ v_5 \\ v_6 l \\ v_7 \\ v_8 l \end{array} \right\} \cos \Omega t + \left\{ \begin{array}{l} -v_5 \\ -v_6 l \\ -v_7 \\ -v_8 l \\ v_1 \\ v_2 l \\ v_3 \\ v_4 l \end{array} \right\} \sin \Omega t \right), \quad (5.34)$$

în care

$$\begin{aligned}
 v_1 &= (42 + 40\kappa) a_{cL} + (18 + 20\kappa) a_{cR}, \\
 v_2 &= (6 + 5\kappa) a_{cL} + (4 + 5\kappa) a_{cR}, \\
 v_3 &= (18 + 20\kappa) a_{cL} + (42 + 40\kappa) a_{cR}, \\
 -v_4 &= (4 + 5\kappa) a_{cL} + (6 + 5\kappa) a_{cR}, \\
 v_5 &= (42 + 40\kappa) a_{sL} + (18 + 20\kappa) a_{sR}, \\
 v_6 &= (6 + 5\kappa) a_{sL} + (4 + 5\kappa) a_{sR}, \\
 v_7 &= (18 + 20\kappa) a_{sL} + (42 + 40\kappa) a_{sR}, \\
 -v_8 &= (4 + 5\kappa) a_{sL} + (6 + 5\kappa) a_{sR}.
 \end{aligned}$$

5.3.2.6 Modelarea rotorului

În figura 5.13 se prezintă un exemplu de modelare cu elemente finite a rotorului unei turbine de joasă presiune (M. L. Adams, SVD, 1980).

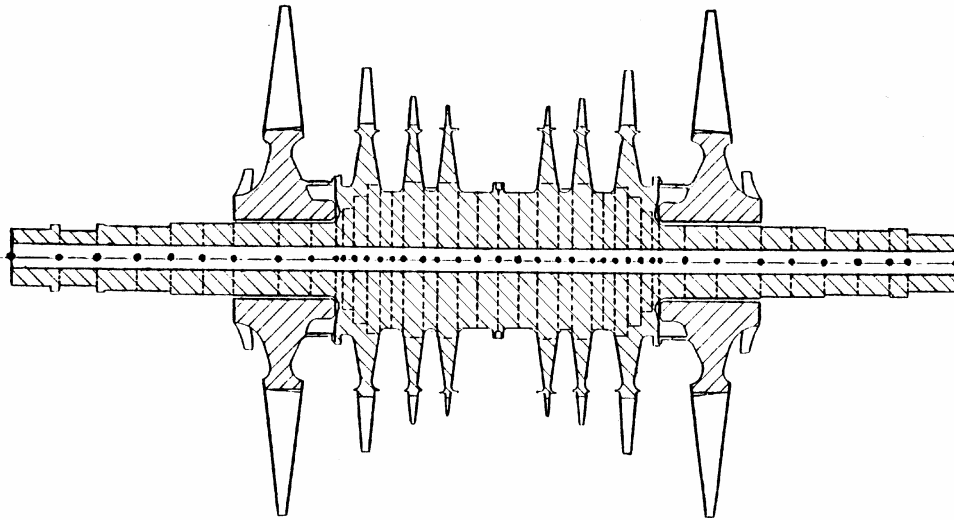


Fig. 5.13

La discurile dintr-o bucată cu arborele, diametrul exterior al fiecărui element de arbore este stabilit în așa fel încât să asigure o variație lentă în trepte în lungul rotorului, și să modeleze cât mai bine partea din disc care contribuie la rigiditatea la încovoiere a rotorului. Restul discului este modelat ca un disc rigid subțire cu gaură centrală.

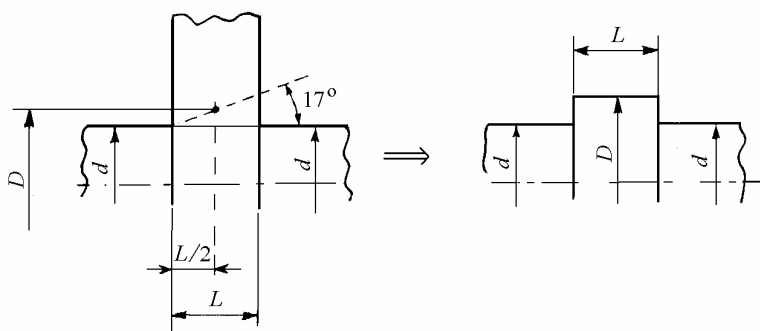


Fig. 5.14

La rotoarele monobloc cu discuri dintr-o bucată cu arborele (fig. 5.14), utilizate la turbinele de presiune înaltă și la discuri fretate pe arbore (fig. 5.15), partea din disc care contribuie la rigiditatea arborelui se determină adesea cu *regula empirică a unghiului*. Același procedeu se aplică pentru înlocuirea unei porțiuni arbore cu variație mare de diametru, prin mai multe trepte de diametre cu variații mai mici (fig. 5.16).

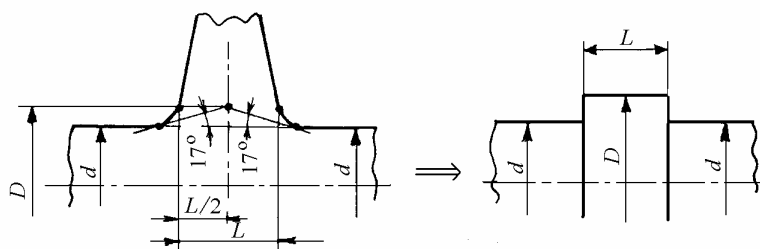


Fig. 5.15

De multe ori pentru calculul matricii de rigiditate a arborelui și matricii de masă a discului, se folosesc diametre diferite pentru aceeași porțiune de rotor. De exemplu, bobinele de pe rotorul unui motor electric contribuie doar la energia cinetică, nu și la cea potențială. Diametrul utilizat la calculul matricii de masă este mai mare decât diametrul folosit la calculul matricii de rigiditate.

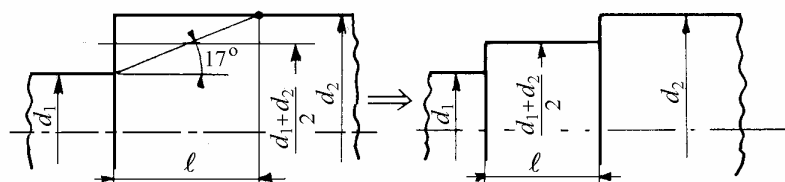


Fig. 5.16

Au fost dezvoltate și elemente finite conice de arbore [5.4] dar prezentarea acestora depășește scopul acestui manual. În cazul formelor geometrice complicate, se utilizează elemente de arbore definite de utilizator, calculate prin inversarea unei matrici de flexibilitate obținută experimental.

5.3.3 Lagăre și etanșări

Lagărele radiale și etanșările cu fluid se modelează prin coeficienți de rigiditate la translație și rigiditate la rotire. Efectele inerțiale se iau în considerație doar la etanșările inelare din pompele centrifuge.

5.3.3.1 Matricea de rigiditate a unui lagăr radial

La un lagăr radial, relația forță-deplasare (în planul $Y-Z$) poate fi scrisă matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = [k^b] \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}, \quad (5.35)$$

în care elementele matricii $[k^b]$ sunt *coeficienți de rigiditate*, k_{ij} fiind forța elastică în direcția i datorită unei deplasări egale cu 1 în direcția j .

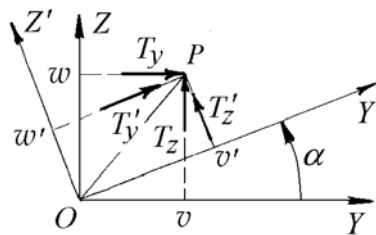


Fig. 5.17

Se consideră triedrul de referință $Y'-Z'$ (fig. 5.17), rotit cu unghiul α față de triedrul $Y-Z$. Transformarea deplasărilor se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}.$$

Transformarea forțelor este

$$\begin{Bmatrix} T'_y \\ T'_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \end{Bmatrix}.$$

Omițând indicele 'b', noua relație forță-deplasare este

$$\begin{Bmatrix} T'_y \\ T'_z \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = [R][k] \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = [R][k][R]^{-1} \begin{Bmatrix} v' \\ w' \end{Bmatrix}.$$

Deoarece $[T]^{-1} = [T]^T$, matricea de rigiditate transformată este

$$[k'] = [R][k][R]^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

unde s-a notat $c = \cos\alpha$ și $s = \sin\alpha$.

Matricea de rigiditate nesimetrică originală poate scrisă ca suma a două matrici componente, una simetrică și una antisimetrică:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}}_{[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{yy} & k_s \\ k_s & k_{zz} \end{bmatrix}}_{[k_s]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k_a \\ -k_a & 0 \end{bmatrix}}_{[k_a]}, \quad (5.37)$$

în care

$$k_s = \frac{1}{2}(k_{yz} + k_{zy}), \quad k_a = \frac{1}{2}(k_{yz} - k_{zy}). \quad (5.38)$$

Matricea de rigiditate transformată devine

$$[k'] = [R]([k_s] + [k_a])[R]^T = [k'_s] + [k'_a]$$

unde, notând $c = \cos\alpha$ și $s = \sin\alpha$, partea simetrică

$$[k'_s] = \begin{bmatrix} k_{yy}c^2 + k_{zz}s^2 + 2k_s cs & (k_{zz} - k_{yy})sc + k_s(c^2 - s^2) \\ (k_{zz} - k_{yy})sc + k_s(c^2 - s^2) & k_{yy}s^2 + k_{zz}c^2 - 2k_s cs \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

și partea antisimetrică

$$[k'_a] = [k_a].$$

Aceste rezultate implică următoarele:

a) componenta antisimetrică $[k_a]$ este independentă de rotirea $[T]$, deci de unghiul α ;

b) atunci când

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2k_s}{k_{yy} - k_{zz}},$$

componenta simetrică $[k_s]$ este diagonală și unghiurile α^* și $\alpha^* + 90^0$ definesc direcțiile principale de rigiditate.

Matricea simetrică $[k_s]$ poate fi diagonalizată prin transformarea de coordonate $[R]$, în timp ce matricea antisimetrică $[k_a]$ rămâne neschimbată. Aceasta implică faptul că o matrice de rigiditate nesimetrică poate fi transformată într-o matrice în care elementele nediagonale sunt egale și de semn contrar.

În cazul special când elementele diagonale sunt identice, există două cazuri interesante:

a) când elementele nediagonale sunt egale și de semn contrar, matricea transformată este identică cu matricea originală

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{bmatrix},$$

deci lagărul este izotrop.

b) când elementele nediagonale sunt identice

$$[k'] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \sin 2\alpha & k_2 \cos 2\alpha \\ k_2 \cos 2\alpha & k_1 - k_2 \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

și pentru $\alpha^* = 45^0$

$$[k'] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 - k_2 \end{bmatrix},$$

deci lagărul este ortotrop, cu axele principale de rigiditate la 45^0 și 135^0 .

Se pot stabili următoarele șase concluzii importante [5.5]:

- a) când $|k_{yz}| \neq |k_{zy}|$, lagărul este anizotrop;
- b) când $k_{yz} = -k_{zy}$ și $k_{yy} = k_{zz}$, lagărul este izotrop;
- c) când $k_{yz} = k_{zy}$ și $k_{yy} \neq k_{zz}$, lagărul este ortotrop, cu direcțiile principale definite de α^* și $\alpha^* + 90^0$;
- d) când $k_{yz} = k_{zy}$ și $k_{yy} = k_{zz}$, lagărul este ortotrop, cu direcțiile principale de rigiditate la 45^0 și 135^0 ;
- e) când $k_{yz} = k_{zy} = 0$ și $k_{yy} \neq k_{zz}$, lagărul este ortotrop, cu direcțiile principale orizontală și verticală;

f) când $k_{yz} = k_{zy} = 0$ și $k_{yy} = k_{zz}$, lagărul este izotrop;

În plus, condiția $k_{yz} \neq k_{zy}$ (elementul nediagonal de cuplaj k_a diferit de zero) este cauza principală a instabilității unui sistem anizotrop.

5.3.3.2 Lagăre cu film fluid

Comportarea liniarizată a lagărelor hidrodinamice este descrisă de componentele pe două direcții ale forțelor obținute prin dezvoltarea în serie Taylor a relațiilor forță-deplasare și forță-viteză, în vecinătatea poziției de echilibru a fusului în lagăr [5.6]:

$$\begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{yy}^b & k_{yz}^b \\ k_{zy}^b & k_{zz}^b \end{bmatrix}}_{[k^b]} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{yy}^b & c_{yz}^b \\ c_{zy}^b & c_{zz}^b \end{bmatrix}}_{[c^b]} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}. \quad (5.40)$$

În formă expandată

$$\begin{bmatrix} k_{yy}^b & 0 & k_{yz}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zy}^b & 0 & k_{zz}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \psi \\ w \\ -\varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{yy}^b & 0 & c_{yz}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zy}^b & 0 & c_{zz}^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ -\dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_y \\ M_z \\ T_z \\ -M_y \end{Bmatrix}.$$

În formă partiționată

$$\begin{bmatrix} [k_{yy}^b] & [k_{yz}^b] \\ [k_{zy}^b] & [k_{zz}^b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_y^b\} \\ \{u_z^b\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [c_{yy}^b] & [c_{yz}^b] \\ [c_{zy}^b] & [c_{zz}^b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}_y^b\} \\ \{\dot{u}_z^b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_y^b\} \\ \{f_z^b\} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

unde

$$[k_{ij}^b] = \begin{bmatrix} k_{ij}^b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [c_{ij}^b] = \begin{bmatrix} c_{ij}^b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (i, j = y, z). \quad (5.42)$$

În continuare, se neglijează efectele inerțiale ale lagărelor și pedestalurilor.

5.3.3.3 Etanșări inelare cu fluid

Etanșările inelare scurte din pompele centrifuge se consideră izotrope. Forțele dinamice din etanșări se reprezintă prin relații forță-deplasare de forma [5.7]

$$\begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + M \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}. \quad (5.43)$$

Elementele diagonale ale matricilor de rigiditate și de amortizare sunt identice, în timp ce elementele nediagonale sunt egale și de semn contrar. Termenii de cuplaj din matricea de amortizare și termenii masici provin din efecte inerțiale. Rigiditățile de cuplaj provin din circulația fluidului, la fel ca în lagărele hidrodinamice cu cuzinet complet necavitate. Coeficienții dinamici din relația (5.43) sunt definiți în Secțiunea 6.10.2.

Forțele de interacțiune între difuzor și voluta impulsorului sunt în general descrise printr-o relație de forma

$$\begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M & m_c \\ -m_c & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}. \quad (5.44)$$

Se remarcă prezența elementelor de cuplaj inerțial m_c , absente în relația (5.43) pentru etanșări cu lichid. Semnul lui m_c este negativ, ceea ce înseamnă că este destabilizator pentru precesia directă. Modelul cu elemente diagonale identice și elemente nediagonale egale și de semn contrar asigură izotropia radială.

Forțele dezvoltate de etanșările labirintice ale compresoarelor centrifuge sunt cu cel puțin un ordin de mărime mai mici decât cele din etanșările cu fluid. Ele au termeni masici neglijabili și sunt de obicei modelate printr-o relație forță-mișcare de forma

$$\begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}. \quad (5.45)$$

Spre deosebire de relația (5.43) valabilă pentru etanșările pompelor, coeficientul de rigiditate directă este în general neglijabil și în multe cazuri negativ.

De obicei se lucrează doar cu coeficienți de translație. Coeficienții dinamici unghiulari se utilizează doar la etanșări inelare lungi, în pompe centrifuge cu mai multe trepte, în care forțele produc rotiri ale arborelui și momentele produc deplasări liniare.

5.3.4 Cuplaje elastice

Un cuplaj flexibil poate fi modelat printr-un element elastic, cu rigiditate izotropă la translație k_T și rigiditate unghiulară k_R , dispus între secțiunea i a unui arbore și secțiunea j a celuiilalt arbore, ca în fig. 5.18 [5.1].

Matricea de rigiditate a unui astfel de cuplaj elastic are forma

5.4.1 Ecuțiile de ordinul doi în spațiul configurațiilor

Se utilizează un vector global al deplasărilor, a cărui jumătate superioară conține deplasările nodale în planul $Y-X$, în timp ce jumătatea inferioară conține deplasările din planul $Z-X$

$$\{x\}^T = \underbrace{\{v_1, \psi_1, v_2, \psi_2, \dots, v_n, \psi_n\}}_{\{Y\}^T} \underbrace{\{w_1, -\varphi_1, w_1, -\varphi_1, \dots, w_n, -\varphi_n\}}_{\{Z\}^T}. \quad (5.47)$$

Corespunzător, jumătatea superioară a vectorului global al forțelor conține forțele nodale din planul $Y-X$, iar jumătatea inferioară conține forțele nodale care acționează în planul $Z-X$

$$\{f\}^T = \underbrace{\{T_{y1}, M_{z1}, T_{y2}, M_{z2}, \dots, T_{yn}, M_{zn}\}}_{\{F_y\}^T} \underbrace{\{T_{z1}, -M_{y1}, T_{z2}, -M_{y2}, \dots, T_{zn}, -M_{yn}\}}_{\{F_z\}^T}. \quad (5.48)$$

Cei doi vectori se partiționează astfel

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{Y\} \\ \{Z\} \end{Bmatrix}, \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} \{F_y\} \\ \{F_z\} \end{Bmatrix}. \quad (5.49)$$

Combinând ecuațiile elementelor componente, ecuațiile de mișcare ale sistemului asamblat pot fi scrise sub forma

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}, \quad (5.50)$$

în care matricile și vectorii

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix}, & [K] &= \begin{bmatrix} [k+k_{yy}] & [k_{yz}] \\ [k_{zy}] & [k+k_{zz}] \end{bmatrix}, \\ [C] &= \begin{bmatrix} [c_{yy}] & [c_{yz}] \\ [c_{zy}] & [c_{zz}] \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} [0] & [g] \\ [-g] & [0] \end{bmatrix}, \\ \{\dot{x}\} &= \begin{Bmatrix} \{\dot{Y}\} \\ \{\dot{Z}\} \end{Bmatrix}, & \{\ddot{x}\} &= \begin{Bmatrix} \{\ddot{Y}\} \\ \{\ddot{Z}\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.51)$$

sunt de ordinul $N = 4n$, unde n este numărul de noduri al modelului cu elemente finite.

Matricea de masă globală este prezentată în fig. 5.19, matricea giroscopică globală – în fig. 5.20, iar matricea de rigiditate globală – în fig. 5.21.

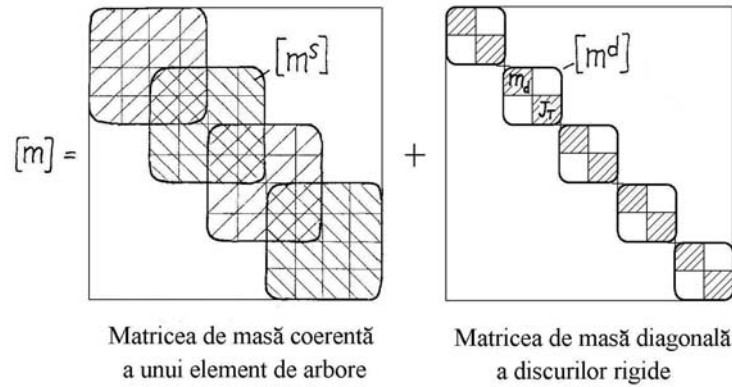


Fig. 5.19

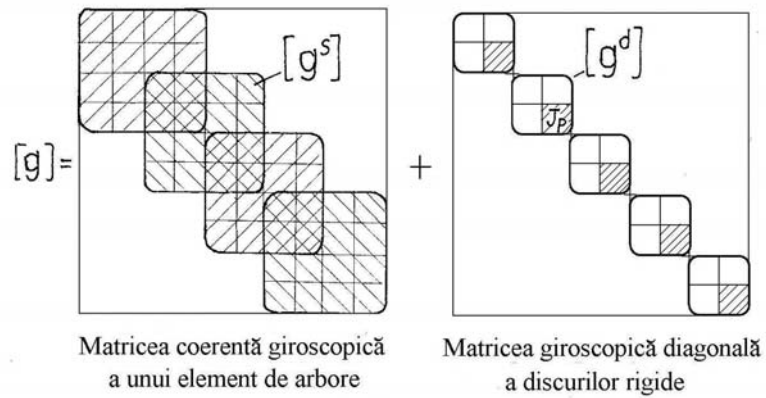


Fig. 5.20

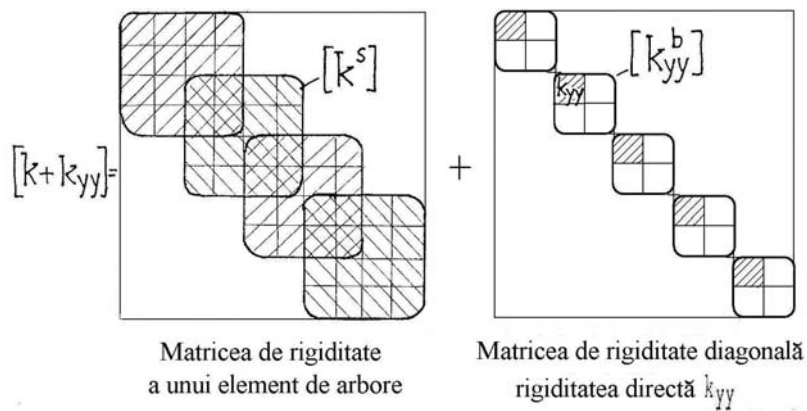


Fig. 5.21

Vectorii forțelor de dezechilibru masic au forma

$$\{f\} = \{F_c\} \cos \Omega t + \{F_s\} \sin \Omega t, \quad (5.52)$$

în care vectorii din membrul drept sunt prezentați în fig. 5.24.

5.4.2 Ecuțiile de ordinul întâi în spațiul stărilor

În vederea rezolvării, ecuațiile de mișcare (5.50) se transformă în ecuații de ordinul întâi, în spațiul stărilor. Introducând ecuația auxiliară

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\}, \quad (5.53)$$

ecuațiile (5.50) și (5.53) pot fi combinate rezultând

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ -[M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.54)$$

sau

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{p\}, \quad (5.55)$$

unde matricile $[A]$ și $[B]$ de dimensiuni $2N \times 2N$ sunt reale dar nesimetrice

$$[A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ -[M] & [0] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}.$$

Sistemul de ecuații astfel format nu este autoadjunct.

Combinând ecuațiile (5.50) și (5.53) se mai poate obține

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & -[M] \\ [K] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

dar în continuare se va utiliza numai forma (5.54).

5.5 Analiza valorilor proprii

Rezolvând problema de valori proprii a unui sistem rotoric, se determină frecvențele proprii, rapoartele de amortizare modale, formele modale de precesie și limitele de stabilitate pentru sisteme giroscopice amortizate.

5.5.1 Vectori proprii la dreapta și vectori proprii la stânga

Valorile proprii și vectorii proprii la dreapta se obțin rezolvând forma omogenă a ecuației (5.55)

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{0\}. \quad (5.57)$$

Presupunând soluții de forma

$$\{q\} = \{\Phi^R\} e^{\lambda t},$$

ecuația (5.57) poate fi scrisă sub forma

$$(\lambda [A] + [B])\{\Phi^R\} = \{0\}. \quad (5.58)$$

Există $r = 2N$ valori proprii λ_r , soluții ale ecuației

$$\det(\lambda [A] + [B]) = 0, \quad (5.59)$$

și $2N$ vectori proprii la dreapta $\{\Phi_r^R\}$ care satisfac problema generalizată de valori proprii

$$[B]\{\Phi_r^R\} = \lambda_r [-A]\{\Phi_r^R\}, \quad (r = 1, \dots, 2N). \quad (5.60)$$

Pentru ecuația transpusă

$$[A]^T \{\dot{q}\} + [B]^T \{q\} = \{0\},$$

se admit soluții de forma

$$\{q\} = \{\Phi^L\} e^{\lambda t}.$$

Rezultă

$$(\lambda [A]^T + [B]^T)\{\Phi^L\} = \{0\}. \quad (5.61)$$

Valorile proprii se obțin rezolvând ecuația

$$\det(\lambda [A] + [B])^T = 0$$

care are aceleași soluții ca ecuația (5.59).

Deoarece transpusa ecuației (5.61) este

$$\{ \Phi^L \}^T (\lambda [A] + [B]) = [0],$$

$\{ \Phi^L \}$ se numesc *vectori proprii la stânga*, soluții ale problemei de valori proprii

$$[B]^T \{ \Phi_r^L \} = \lambda_r [-A]^T \{ \Phi_r^L \}, \quad (r = 1, \dots, 2N). \quad (5.62)$$

Vectorii proprii la dreapta și vectorii proprii la stânga, de dimensiuni $2N \times 1$, satisfac relațiile de biortogonalitate

$$\begin{aligned} \{ \Phi_s^L \}^T [-A] \{ \Phi_r^R \} &= \alpha_r \delta_{rs} = \begin{cases} \alpha_r & \text{pentru } r = s \\ 0 & \text{pentru } r \neq s \end{cases} \\ \{ \Phi_s^L \}^T [B] \{ \Phi_r^R \} &= \beta_r \delta_{rs} = \begin{cases} \beta_r & \text{pentru } r = s \\ 0 & \text{pentru } r \neq s \end{cases} \end{aligned} \quad (5.63)$$

astfel încât

$$\lambda_r = \frac{\beta_r}{\alpha_r}. \quad (5.64)$$

Relațiile de biortogonalitate între vectorii modali ai sistemului original și cei ai sistemului transpus pot fi utilizate pentru decuplarea ecuațiilor de mișcare.

5.5.2 Reducerea la problema standard de valori proprii

Ecuția (5.58) poate fi scrisă sub forma

$$[R] \{ \Phi^R \} = \frac{1}{\lambda} \{ \Phi^R \} \quad (5.65)$$

în care

$$[R] = -[B]^{-1}[A] = \begin{bmatrix} -[K]^{-1}[C] & -[K]^{-1}[M] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}$$

este o matrice reală nesimetrică, de dimensiuni $2N \times 2N$.

Prin rezolvarea problemei de valori proprii a ecuației (5.65) se obțin însă inversele valorilor proprii. Jumătatea superioară a vectorilor proprii reprezintă vectorii proprii, de dimensiuni $N \times 1$, ai problemei originale.

O metodă diferită utilizează forma (5.56). Pentru o soluție de forma

$$\{ x \} = \{ u \} e^{\lambda t}, \quad (5.66)$$

forma omogenă a ecuației (5.56) devine

$$\lambda \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \lambda \{u\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & -[M] \\ [K] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \lambda \{u\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.67)$$

sau

$$\left(\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \lambda \{u\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}.$$

De reținut că $N = 4n$, unde n este numărul nodurilor modelului.

5.5.3 Diagrame Campbell și diagrame de stabilitate

Ecuția (5.65) are $2N$ soluții proprii, unde N este ordinul matricilor globale ale sistemului. Aceste soluții sunt pur reale, în cazul modurilor amortizate supracritic, și apar în perechi complexe conjugate, în cazul modurilor de precesie neamortizate sau amortizate subcritic.

În general, valorile proprii complexe au forma

$$\lambda_r = \alpha_r + i\omega_r, \quad \lambda_r^* = \alpha_r - i\omega_r, \quad (5.68)$$

fiind funcții de viteza unghiulară de rotație a rotorului Ω . Partea imaginară ω_r a valorii proprii este *pulsația proprie* (viteza unghiulară) de precesie iar partea reală α_r este *constantă de amortizare*. La moduri stabile α_r trebuie să fie nepozitivă.

Nivelul amortizării se exprimă prin *raportul de amortizare* modală

$$\zeta_r \cong -\frac{\alpha_r}{\omega_r},$$

sau prin *decrementul logaritmic*

$$\delta_r = 2\pi\zeta_r \cong -\frac{2\pi\alpha_r}{\omega_r}.$$

De obicei se reprezintă grafic variația pulsațiilor proprii de precesie și a constantelor de amortizare în funcție de viteza unghiulară de rotație Ω . Aceste diagrame se numesc *diagrame ale vitezelor unghiulare de precesie* (“whirl speed maps”) [5.1]. O astfel de diagramă este prezentată în figura 5.25.

În majoritatea aplicațiilor practice, dacă sistemul devine instabil, atunci instabilitatea este produsă de primul mod de precesie directă, în timp ce restul modurilor rămân stabile. În fig. 5.25 se arată că primul mod de precesie devine instabil la *viteza unghiulară de apariție a instabilității* (“onset speed of instability”), Ω_{oi} .

În *diagramele Campbell* se reprezintă grafic variația pulsațiilor (frecvențelor) proprii de precesie în funcție de (turația) viteza unghiulară a

rotorului. Dacă pe curbele pulsațiilor proprii se marchează puncte la valori date ale decrementului logaritm, acestea se numesc *diagrame Lund*. Dacă se reprezintă numai partea reală a valorilor proprii în funcție de turație, se obțin *diagrame de stabilitate*. Exemple de diagrame Campbell și diagrame de stabilitate pentru diverse modele rotorice sunt date în Secțiunile 3.4 și 4.5 din Partea I.

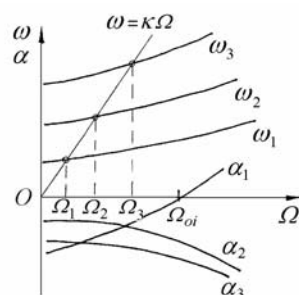


Fig. 5.25

O viteză unghiulară (turație) critică de ordinul κ a unui sistem rotoric cu un singur arbore este definită ca viteza unghiulară (turația) pentru care un multiplu al ei coincide cu una din pulsațiile (frecvențele) proprii de precesie ale sistemului. În figura 5.25 s-a trasat linia pulsațiilor excitatoare de ecuație $\omega = \kappa\Omega$. Când Ω este egală cu Ω_r , excitația $\kappa\Omega_r$ crează o condiție de rezonanță.

O metodă de determinare a turațiilor critice se bazează pe construcția diagramei Campbell, trasarea liniilor pulsațiilor excitatoare de interes, și marcarea intersecțiilor, ale căror abscise indică turațiile critice asociate cu fiecare excitație.

Vectorii proprii complecși conjugați au forma

$$\{u\}_r = \{a\}_r + i\{b\}_r, \quad \{u^*\}_r = \{a\}_r - i\{b\}_r. \quad (5.69)$$

Soluția precesiei libere într-un anumit mod poate fi scrisă ca suma a două soluții proprii complex conjugate, incluzând perechea de valori proprii și vectori proprii la dreapta

$$\begin{aligned} \{x(t)\}_r &= \{u\}_r e^{\lambda_r t} + \{u^*\}_r e^{\lambda_r^* t} = \\ &= (\{a\}_r + i\{b\}_r) e^{(\alpha_r + i\omega_r)t} + (\{a\}_r - i\{b\}_r) e^{(\alpha_r - i\omega_r)t}. \\ \{x(t)\}_r &= 2e^{\alpha_r t} \left(\{a\}_r \frac{e^{i\omega_r t} + e^{-i\omega_r t}}{2} + i\{b\}_r \frac{e^{i\omega_r t} - e^{-i\omega_r t}}{2i} \right) = \\ &= 2e^{\alpha_r t} (\{a\}_r \cos \omega_r t - \{b\}_r \sin \omega_r t). \end{aligned} \quad (5.70)$$

În figura 5.26 se prezintă natura mișcării într-un mod de precesie amortizat (s-au omis indicii nodal și modal).

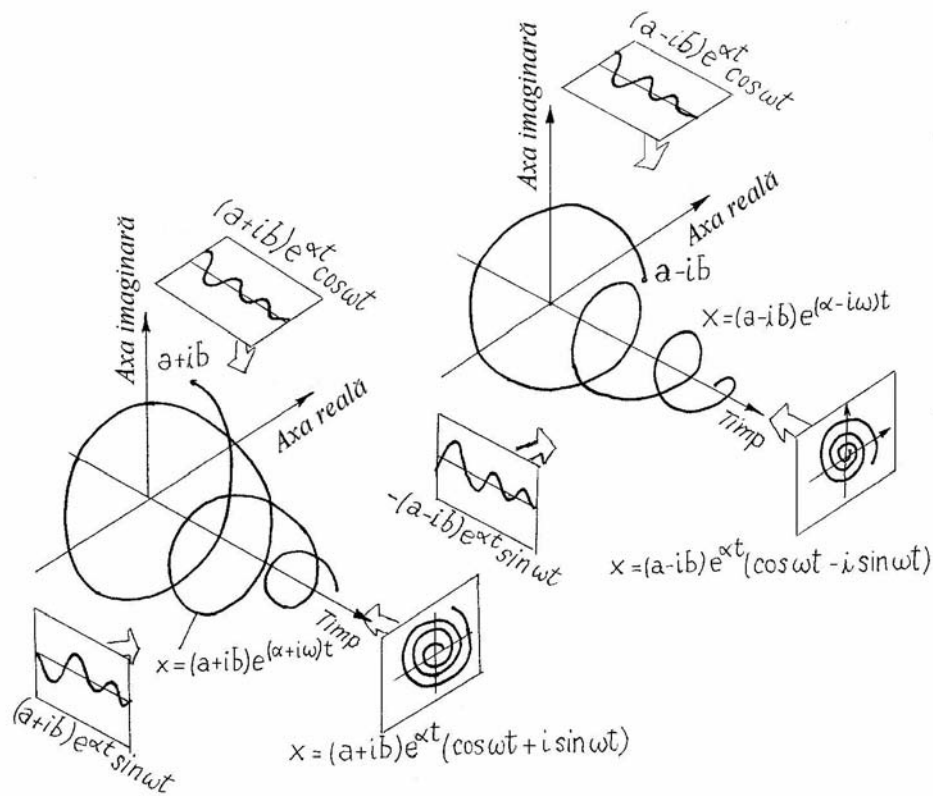


Fig. 5.26

Termenul $2e^{\alpha t}$ nu influențează forma modală, fiind un factor comun pentru toate coordonatele. Jumătatea superioară a vectorului modal poate fi aproximată sub forma

$$\{x\}_r = \{u_c\} \cos \omega_r t + \{u_s\} \sin \omega_r t,$$

în care

$$\{u_c\} = \{a\}_r = \text{Re} \{u\}_r, \quad \{u_s\} = -\{b\}_r = -\text{Im} \{u\}_r.$$

În acest fel, orbita în orice punct devine o elipsă în loc de spirală, și se convine să se traseze elipse incomplete ("deschise").

Un element oarecare j al modului de precesie r are expresia

$$x_j(t) = u_c \cos \omega_r t + u_s \sin \omega_r t,$$

care definește o mișcare armonică cu pulsația ω_r .

Cele două componente ale mișcării de translație în orice punct sunt

$$\begin{aligned} v &= v_c \cos \omega_r t + v_s \sin \omega_r t, \\ w &= w_c \cos \omega_r t + w_s \sin \omega_r t, \end{aligned} \quad (5.71)$$

relații care reprezintă ecuațiile parametrice ale unei elipse.

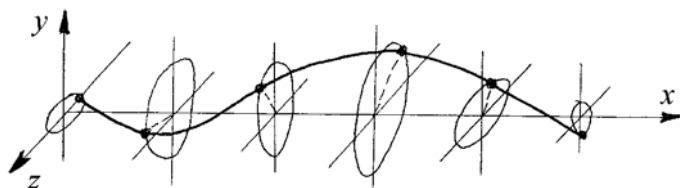


Fig. 5.27

Raza vectoroare a unui punct de pe elipsă, la un moment oarecare t , este

$$\bar{r}(t) = v(t) + i w(t).$$

Forma modului de precesie se obține unind punctele de pe diferite elipse care marchează poziția rotorului la un moment dat, aceasta fiind în general o curbă în spațiu (fig. 5.27). Exemple sunt date în Secțiunile 3.4 și 4.5 din Partea I.

Un caz special este cel al *sistemelor giroscopice conservative*. La un sistem giroscopic neamortizat, dacă lagărele au axe principale de rigiditate coliniare, ecuația (5.50) devine

$$\begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{Y}\} \\ \{\ddot{Z}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [g] \\ -[g] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{Y}\} \\ \{\dot{Z}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_y] & [0] \\ [0] & [k_z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Y\} \\ \{Z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \quad (5.72)$$

Dacă se admite o soluție de forma (5.66), deoarece sistemul are valori proprii pur imaginare, $\lambda = i\omega$, ecuația (5.72) devine [5.8]

$$\begin{bmatrix} [k_y] - \omega^2 [m] & i\omega [g] \\ -i\omega [g] & [k_z] - \omega^2 [m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y_R\} + i\{y_I\} \\ \{z_R\} + i\{z_I\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix},$$

din care se obțin patru ecuații matriciale cuplate. Între soluțiile acestor ecuații se pot stabili relațiile

$$\{y_I\} = \beta \{y_R\}, \quad \{z_R\} = -\beta \{z_I\},$$

în care β este un factor de proporționalitate.

Vectorul modal se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} \{y_R\} + i\{y_I\} \\ \{z_R\} + i\{z_I\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{y_R\} + i\beta \{y_R\} \\ -\beta \{z_I\} + i\{z_I\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1+i\beta)\{y_R\} \\ (-\beta+i)\{z_I\} \end{Bmatrix} = (1+i\beta) \begin{Bmatrix} \{y_R\} \\ i\{z_I\} \end{Bmatrix}$$

și poate fi normalizat prin împărțire la factorul comun $(1 + i\beta)$.

Rezultă că sistemele giroscopice conservative sunt descrise de valori proprii pur imaginare, iar vectorii proprii sunt reali în planul X - Y și pur imaginari în planul X - Z , descriind forme modale plane.

5.6 Răspunsul la dezechilibru

Răspunsul forțat al unui rotor poate fi determinat fie indirect, în coordonate modale, fie direct, în coordonate fizice.

5.6.1 Rezolvarea prin analiză modală

În cazul excitației sincrone datorită dezechilibrului masic

$$\{f\} = \{F\} e^{i\Omega t}, \quad \{x\} = \{X\} e^{i\Omega t},$$

ecuația (5.54) devine

$$\left(i\Omega \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ -[M] & [0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{X\} \\ i\Omega \{X\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

sau

$$(i\Omega [A] + [B])\{Q\} = \{P\}$$

unde

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ i\Omega \{X\} \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}.$$

Se alege o soluție de forma

$$\{Q\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\Phi^R\}_r \eta_r, \quad (5.73)$$

în care η_r sunt coordonate modale.

Înmulțind la stânga cu $\{\Phi^R\}_r^T$ și ținând cont de relațiile de biortogonalitate (5.63), ecuația decuplată în coordonata η_r este

$$\{\Phi^L\}_r^T (i\Omega [A] + [B]) \{\Phi^R\}_r \eta_r = \{\Phi^L\}_r^T \{P\}$$

sau

$$\alpha_r (i\Omega - \lambda_r) \eta_r = \{\Phi^L\}_r^T \{P\}.$$

Coordonata modală η_r are expresia

$$\eta_r = \frac{\{\Phi^L\}_r^T \{P\}}{\alpha_r (i\Omega - \lambda_r)}.$$

Din relația (5.73) se obține vectorul coordonatelor fizice

$$\{Q\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\Phi^R\}_r \{\Phi^L\}_r^T}{\alpha_r (i\Omega - \lambda_r)} \{P\},$$

a cărui jumătate superioară este

$$\{X\} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\bar{\Phi}^R\}_r \{\bar{\Phi}^L\}_r^T}{\alpha_r (i\Omega - \lambda_r)} \{F\}, \quad (5.74)$$

unde $\{\bar{\Phi}^R\}_r$ și $\{\bar{\Phi}^L\}_r$ sunt jumătățile superioare ale vectorilor modali corespunzători.

5.6.2 Rezolvarea prin analiză spectrală

Se consideră din nou ecuația (5.50). Pentru o excitație sincronă

$$\{f\} = \{F_c\} \cos \Omega t + \{F_s\} \sin \Omega t, \quad (5.75)$$

răspunsul staționar are forma

$$\{x\} = \{X_c\} \cos \Omega t + \{X_s\} \sin \Omega t. \quad (5.76)$$

Înlocuind (5.75) și (5.76) în (5.50) se obține

$$\begin{aligned} & \left([K] - \Omega^2 [M] \right) \{X_c\} + \Omega [C] \{X_s\} = \{F_c\}, \\ & -\Omega [C] \{X_c\} + \left([K] - \Omega^2 [M] \right) \{X_s\} = \{F_s\}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Acesta este un sistem liniar de ecuații care se rezolvă prin metode cunoscute. Componentele “cos” și “sin” se înlocuiesc apoi în expresia (5.76). Cele două componente ale mișcării de translație din fiecare secțiune sunt date de relații de forma (5.71), pe baza cărora se calculează orbitele eliptice, după cum se arată în Secțiunea 5.7.

5.7 Cinematica mișcării eliptice

În continuare, sistemul de coordonate carteziene fixe (staționare) este notat x, y, z .

5.7.1 Orbitele eliptice

Cea mai simplă mișcare a unui punct al unui rotor este o mișcare plană cu viteza unghiulară de precesie ω . Componentele deplasării în direcțiile y și z sunt

$$\begin{aligned} y &= y_c \cos \omega t + y_s \sin \omega t, \\ z &= z_c \cos \omega t + z_s \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Aceste relații definesc o orbită eliptică, după cum se arată în fig. 5.28.

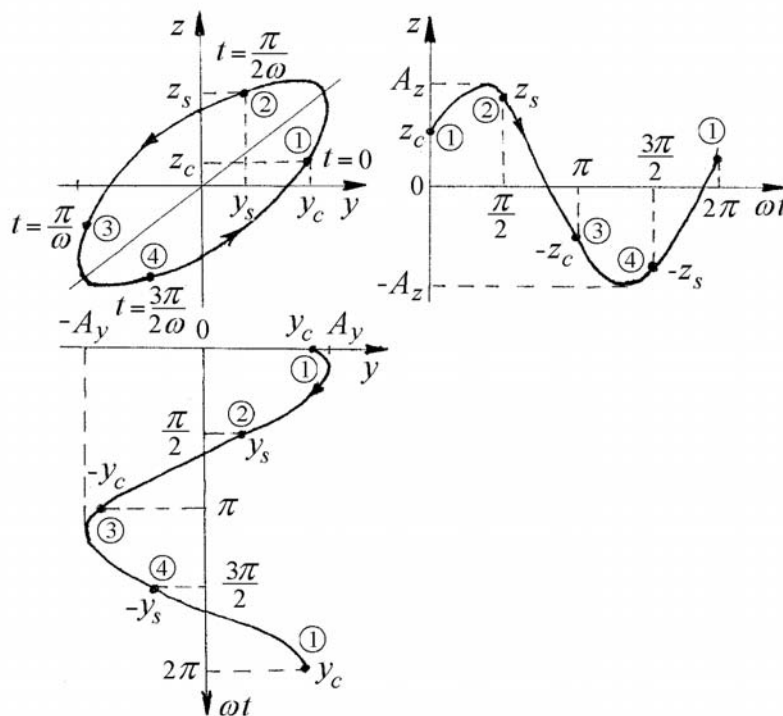


Fig. 5.28

Elipsa rezultă prin compunerea a două mișcări armonice cu amplitudini și unghiuri de fază diferite

$$\begin{aligned} y &= A_y \cos(\omega t + \theta_y) = A_y \cos \theta_y \cos \omega t - A_y \sin \theta_y \sin \omega t, \\ z &= A_z \cos(\omega t + \theta_z) = A_z \cos \theta_z \cos \omega t - A_z \sin \theta_z \sin \omega t, \end{aligned} \quad (5.78, a)$$

în două direcții perpendiculare între ele.

Se observă că

$$\begin{aligned} A_y &= (y_c^2 + y_s^2)^{1/2}, & \operatorname{tg} \theta_y &= -\frac{y_s}{y_c}, \\ A_z &= (z_c^2 + z_s^2)^{1/2}, & \operatorname{tg} \theta_z &= -\frac{z_s}{z_c}. \end{aligned}$$

Parametrii mișcării eliptice sunt în general funcții de viteza unghiulară de rotație Ω . Se remarcă două cazuri particulare [5.1]:

a) Dacă $\theta_y = \theta_z$, componentele y și z sunt în fază, iar orbita se reduce la o linie dreaptă (fig. 5.29).

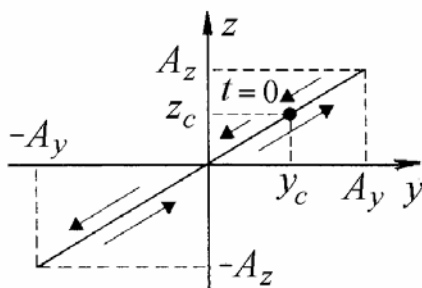


Fig. 5.29

b) Dacă $y_s = -z_c$ ($+z_c$) și $y_c = +z_s$ ($-z_s$) componenta y este defazată înainte (în urma) componentei z cu 90° , rezultând o orbită circulară (fig. 5.30) de precesie directă (inversă).

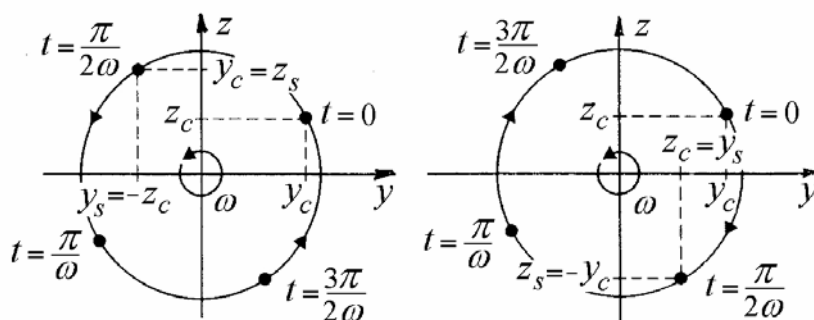


Fig. 5.30

Ecuțiile parametrice (5.78) definesc o elipsă înclinată față de axele y - z . Rezolvând în $\cos \omega t$ și $\sin \omega t$

$$\begin{aligned}\cos \omega t &= (y z_s - z y_s) / (y_c z_s - z_c y_s), \\ \sin \omega t &= (z y_c - y z_c) / (y_c z_s - z_c y_s),\end{aligned}$$

eliminând apoi timpul, se obține ecuația orbitei sub forma

$$(z_c^2 + z_s^2) y^2 - 2(y_c z_c + y_s z_s) y z + (y_c^2 + y_s^2) z^2 = (y_s z_c - y_c z_s)^2. \quad (5.79)$$

Ecuția (5.79) se poate exprima în funcție de semiaxele a și b , și de unghiul de înclinare al axei mari α (fig. 5.31).

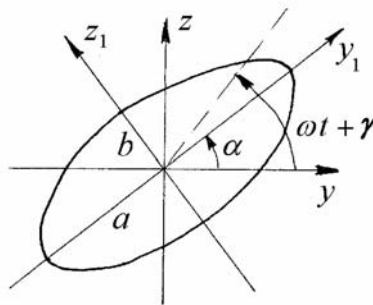


Fig. 5.31

În sistemul de coordonate (principale) $y_1 - z_1$, cu axele orientate în lungul axelor elipsei, mișcarea este descrisă de componentele

$$\begin{aligned}y_1 &= a \cos(\omega t + \gamma - \alpha), \\ z_1 &= b \sin(\omega t + \gamma - \alpha),\end{aligned} \quad (5.80)$$

unde γ este un unghi de fază (înclinarea razei vectoriale la $t = 0$), astfel încât

$$\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 = 1. \quad (5.81)$$

Transformarea de coordonate

$$\begin{aligned}y &= y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha, \\ z &= y_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha,\end{aligned} \quad (5.82)$$

conduce la ecuații parametrice de forma (5.78). Combinând ecuațiile (5.78), (5.80) și (5.82), se pot obține cei patru parametri ai elipsei a , b , α și γ în funcție de y_c , y_s , z_c și z_s . În continuare, determinarea acestora se face printr-o metodă diferită.

5.7.2 Descompunerea în mișcări circulare directă și inversă

Orbitele eliptice pot fi reprezentate cu ajutorul vectorilor complecși rotitori, considerând planul y - z ca un plan complex (planul Argand), cu axa reală în lungul axei y și axa imaginară în lungul axei z .

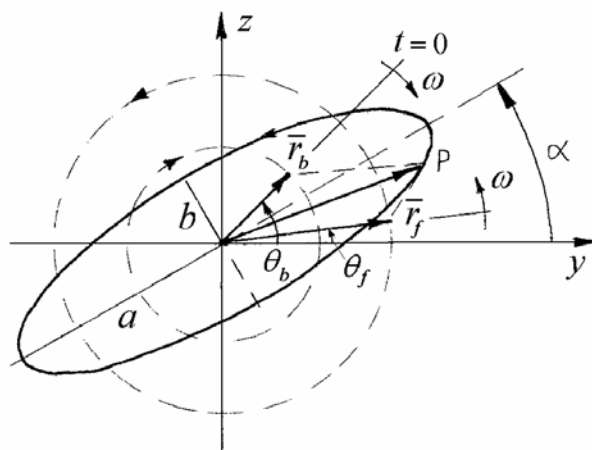


Fig. 5.32

Rezultanta \bar{r} a doi vectori, \bar{r}_f care se rotește în sens antiorar (*forward*) și \bar{r}_b care se rotește în sens orar (*backward*), definește un punct P care se deplasează în lungul unei orbite eliptice (fig. 5.32):

$$\bar{r} = \bar{r}_f e^{i\omega t} + \bar{r}_b e^{-i\omega t} = |\bar{r}_f| e^{i(\omega t + \theta_f)} + |\bar{r}_b| e^{i(-\omega t + \theta_b)}. \quad (5.83)$$

Din expresiile (5.78) se obțin componentele

$$y = y_c \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + y_s \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}),$$

$$z = z_c \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + z_s \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}),$$

astfel încât vectorul rezultaant

$$\begin{aligned} \bar{r} = y + iz &= \\ &= e^{i\omega t} \left[\frac{1}{2} (y_c + z_s) + i \frac{1}{2} (-y_s + z_c) \right] + e^{-i\omega t} \left[\frac{1}{2} (y_c - z_s) + i \frac{1}{2} (y_s + z_c) \right]. \end{aligned}$$

Rezultă că \bar{r} este suma unui vector cu amplitudinea complexă \bar{r}_f , care se rotește în același sens cu rotorul și a unui vector cu amplitudinea complexă \bar{r}_b , care se rotește în sens contrar

$$\begin{aligned}\bar{r}_f &= \frac{1}{2}(y_c + z_s) + i \frac{1}{2}(-y_s + z_c) = |\bar{r}_f| e^{i\theta_f}, \\ \bar{r}_b &= \frac{1}{2}(y_c - z_s) + i \frac{1}{2}(y_s + z_c) = |\bar{r}_b| e^{i\theta_b}.\end{aligned}\quad (5.84)$$

Amplitudinile și unghiurile de fază au expresiile

$$\begin{aligned}|\bar{r}_f| &= \frac{1}{2} \sqrt{(y_c + z_s)^2 + (-y_s + z_c)^2} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{tg } \theta_f = \frac{-y_s + z_c}{y_c + z_s}, \\ |\bar{r}_b| &= \frac{1}{2} \sqrt{(y_c - z_s)^2 + (y_s + z_c)^2} = \frac{a-b}{2}, \quad \text{tg } \theta_b = \frac{y_s + z_c}{y_c - z_s}.\end{aligned}\quad (5.85)$$

Semiaxa mare se scrie sub forma

$$a = |\bar{r}_f| + |\bar{r}_b|, \quad (5.86)$$

$$a^2 = \frac{1}{2}(y_c^2 + y_s^2 + z_c^2 + z_s^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(y_c^2 + y_s^2 + z_c^2 + z_s^2)^2 - (y_c z_s - y_s z_c)^2}.$$

Semiaxa mică este

$$b = |\bar{r}_f| - |\bar{r}_b| = \frac{1}{a} \det \begin{bmatrix} y_c & y_s \\ z_c & z_s \end{bmatrix}. \quad (5.87)$$

Înclinarea axei mari (unghiul de atitudine) este

$$\alpha = \frac{1}{2}(\theta_f + \theta_b). \quad (5.88)$$

Din condiția de egalitate a fazelor rezultă

$$\alpha = \omega t^* + \theta_f = -\omega t^* + \theta_b, \quad 2\omega t^* = \theta_b - \theta_f,$$

unde t^* este timpul la care P este în poziția de amplitudine maximă a deplasării.

Se pot stabili următoarele expresii utile

$$\text{tg } 2\omega t^* = \frac{2(y_c y_s + z_c z_s)}{y_c^2 - y_s^2 + z_c^2 - z_s^2}, \quad (5.89)$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2(y_c z_c + y_s z_s)}{y_c^2 + y_s^2 - z_c^2 - z_s^2}. \quad (5.90)$$

Precesia este directă (*forward*) atunci când

$$|\bar{r}_f| > |\bar{r}_b|, \quad b > 0, \quad y_c z_s > y_s z_c,$$

și este inversă (*backward*) când

$$|\bar{r}_f| < |\bar{r}_b|, \quad b < 0, \quad y_c z_s < y_s z_c.$$

Orbita este o linie dreaptă (elipsă degenerată) când

$$|\bar{r}_f| = |\bar{r}_b|, \quad b = 0, \quad y_c z_s = y_s z_c.$$

5.7.3 Viteza unghiulară variabilă în lungul elipsei

Se consideră o elipsă (fig. 5.33) descrisă de ecuațiile parametriche

$$\begin{aligned} y &= a \cos \omega t, \\ z &= b \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5.91)$$

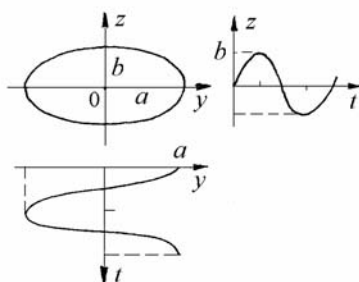


Fig. 5.33

Din comparația cu ecuațiile (5.78, a) rezultă

$$\begin{aligned} y &= A_y \cos(\omega t + \theta_y) = a \cos \omega t, \\ z &= A_z \cos(\omega t + \theta_z) = b \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = b \sin \omega t, \end{aligned}$$

deci

$$A_y = a, \quad \theta_y = 0, \quad A_z = b, \quad \theta_z = \frac{\pi}{2}.$$

În fig. 5.34 este ilustrată *metoda cercurilor concentrice* pentru construcția unei elipse. Se trasează două cercuri concentrice cu centrul în O . Diametrul cercului mare este egal cu axa mare $2a$. Diametrul cercului mic este egal cu axa mică $2b$. O rază care face unghiul ωt cu axa y intersectează cercul mare în M și cercul mic în P . Punctul B de pe elipsă se obține la intersecția paralelei din M la axa z , cu paralela din P la axa y .

Punctul A de pe axa y corespunde la $t=0$. Punctul B corespunde la t , iar punctul C la $t+\pi/2\omega$. Între punctele B și C intervalul de timp este $\pi/2\omega$ ($\angle MON = 90^\circ$) în timp ce unghiul BOC este mai mare de 90° .

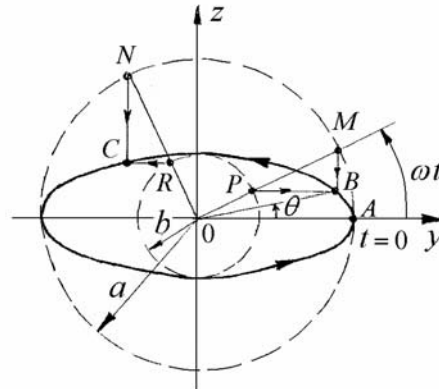


Fig. 5.34

Atunci când punctul M se deplasează în lungul cercului de rază a cu viteza unghiulară constantă ω , punctul B se deplasează în lungul elipsei cu viteză unghiulară variabilă.

Dacă se notează $\theta = AOB$, poziția unghiulară la momentul t este dată de

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z}{y} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \omega t. \quad (5.92)$$

Variația lui θ în funcție de ωt este prezentată în fig. 5.35. Deviația față de linia dreaptă indică o viteză unghiulară variabilă.

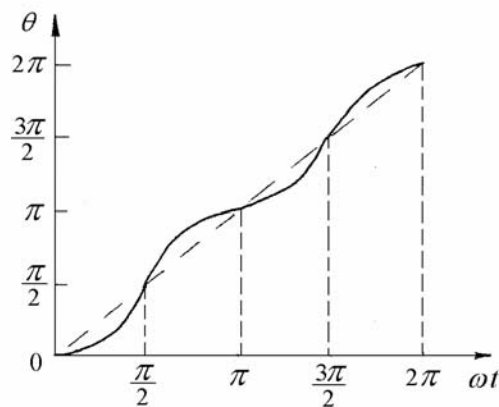


Fig. 5.35

Într-adevăr, viteza unghiulară a mișcării în lungul elipsei este

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\theta}{d(\omega t)} = \frac{\omega \frac{b}{a} \sec^2 \omega t}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \omega t}. \quad (5.93)$$

Variația lui $\dot{\theta}$ în funcție de ωt este prezentată în figura 5.36. Se observă că $\dot{\theta}$ variază între limitele $\omega' = (b/a)\omega$ și $\omega'' = (a/b)\omega$ astfel încât $\omega = \sqrt{\omega' \omega''}$.

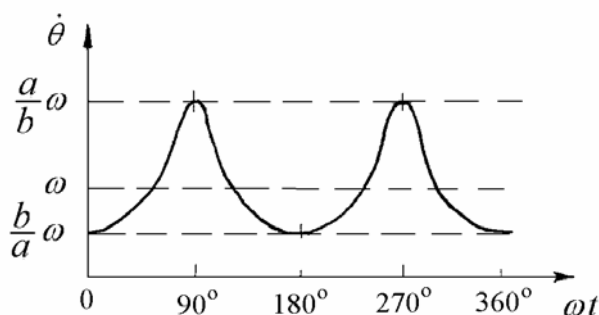


Fig. 5.36

În concluzie, viteza unghiulară a mișcării de precesie nu este $\dot{\theta}$ – cea a punctului B în lungul orbitei eliptice, ci viteza unghiulară ω a punctelor M și P în lungul cercurilor generatoare, de raze a și b .

5.8 Reducerea ordinului modelului

Discretizarea inițială cu elemente finite a unui sistem rotoric utilizează un număr relativ mare de grade de libertate (GDL) pentru a obține o precizie satisfăcătoare a calculelor. Uneori este necesară reducerea numărului GDL deoarece, în unele aplicații, interesează doar comportarea într-un domeniu limitat de turații joase, definită în principal de un număr redus de moduri de precesie.

5.8.1 Condensarea modelului

Metodele de condensare statică sau dinamică se utilizează pentru obținerea unor modele de ordin redus, ale căror valori și vectori proprii aproximează pe cele ale modelului original de dimensiuni mai mari.

5.8.1.1 Formalismul reducerii numărului coordonatelor

Se consideră ecuația (5.50) sub forma

$$\begin{bmatrix} M \\ N \times N \end{bmatrix} \{ \ddot{x} \}_{ N \times 1} + \begin{bmatrix} C \\ N \times N \end{bmatrix} \{ \dot{x} \}_{ N \times 1} + \begin{bmatrix} K \\ N \times N \end{bmatrix} \{ x \}_{ N \times 1} = \{ f \}_{ N \times 1}. \quad (5.94)$$

Se caută o matrice de transformare dreptunghiulară $[T]$, care exprimă cele $N = 4n$ elemente (coordonațe) ale vectorului $\{x\}$ printr-un număr mai mic $L < N$ de elemente (coordonațe) ale vectorului $\{u\}$, astfel încât

$$\begin{bmatrix} x \\ N \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ N \times L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ L \times 1 \end{bmatrix}. \quad (5.95)$$

Transformarea este independentă de timp, deci

$$\begin{bmatrix} x \\ N \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ N \times L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ L \times 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ N \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ N \times L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ L \times 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ N \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ N \times L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ L \times 1 \end{bmatrix}. \quad (5.96)$$

Înlocuind expresiile (5.96) în (5.94) și înmulțind la stânga cu $[T]^T$, prin echivalarea energiilor se obțin ecuațiile de mișcare reduse

$$\begin{bmatrix} M^{red} \\ L \times L \end{bmatrix} \{ \ddot{u} \}_{ L \times 1} + \begin{bmatrix} C^{red} \\ L \times L \end{bmatrix} \{ \dot{u} \}_{ L \times 1} + \begin{bmatrix} K^{red} \\ L \times L \end{bmatrix} \{ u \}_{ L \times 1} = \{ f^{red} \}_{ L \times 1}, \quad (5.97)$$

unde

$$\begin{bmatrix} M^{red} \\ L \times L \end{bmatrix} = [T]^T [M] [T], \quad \begin{bmatrix} C^{red} \\ L \times L \end{bmatrix} = [T]^T [C] [T], \quad \begin{bmatrix} K^{red} \\ L \times L \end{bmatrix} = [T]^T [K] [T],$$

$$\{ f^{red} \}_{ L \times 1} = [T]^T \{ f \}_{ N \times 1}.$$

O alegere adecvată a matricii $[T]$ reduce drastic numărul GDL fără să modifice frecvențele proprii joase și formele modurilor de precesie respective.

5.8.1.2 Condensarea Guyan/Irons

Metoda Guyan/Irons se bazează pe un procedeu standard utilizat în analiza structurală *statică*, și anume eliminarea GDL la care nu sunt aplicate forțe, de unde numele de *condensare statică*.

Coordonatele (GDL) sunt partiționate în două grupe: a) coordonatele *active* (“master”, reținute), și b) coordonatele *omise* (“slave”, eliminate), notate cu “a”, respectiv “o”.

Partiționând ecuația (5.94) corespunzător, se obține forma

$$\begin{bmatrix} [M_{aa}] & [M_{ao}] \\ [M_{oa}] & [M_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}_a\} \\ \{\ddot{x}_o\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{aa}] & [C_{ao}] \\ [C_{oa}] & [C_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}_a\} \\ \{\dot{x}_o\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ao}] \\ [K_{oa}] & [K_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ \{x_o\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_a\} \\ \{f_o\} \end{Bmatrix}. \quad (5.98)$$

Presupunând $\{f_o\} = \{0\}$, relația *statică* între forțe și deplasări se reduce la

$$\begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ao}] \\ [K_{oa}] & [K_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ \{x_o\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_a\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \quad (5.99)$$

Partiția inferioară reprezintă o relație de legătură (constrângere) statică

$$[K_{oa}]\{x_a\} + [K_{oo}]\{x_o\} = \{0\} \quad (5.100)$$

care poate fi scrisă

$$\{x_o\} = -[K_{oo}]^{-1}[K_{oa}]\{x_a\}. \quad (5.101)$$

Vectorul coordonatelor originale $\{x\}$ poate fi exprimat în funcție de subvectorul coordonatelor *active*

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ \{x_o\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_a] \\ -[K_{oo}]^{-1}[K_{oa}] \end{bmatrix} \{x_a\} = [T]\{x_a\}. \quad (5.102)$$

Relația (5.102) poate fi considerată o *transformare Ritz*. Vectorii bazei Ritz, care sunt coloanele matricii de transformare Ritz $[T]$, descriu configurații cu deplasări egale cu 1 în coordonatele "a", și deplasări (5.101) în coordonatele "o"

$$\{x\} = [T]\{x_a\} = \begin{bmatrix} \{t_1\} & \{t_2\} & \cdots & \{t_L\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{a1} \\ \cdots \\ x_{aL} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^L \{t_j\} x_{aj}. \quad (5.103)$$

Sistemul redus de ecuații are forma (5.97), în care

$$\{u\} = \{x_a\},$$

$$[K^{red}] = [K_{aa}] - [K_{ao}][K_{oo}]^{-1}[K_{oa}], \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} [M^{red}] = & [M_{aa}] - [K_{ao}][K_{oo}]^{-1}[M_{oa}] - [M_{oa}][K_{oo}]^{-1}[K_{oa}] +, \\ & + [K_{ao}][K_{oo}]^{-1}[M_{oo}][K_{oo}]^{-1}[K_{oa}], \end{aligned} \quad (5.105)$$

iar $[C^{red}]$ are o expresie similară cu (5.105).

Înlocuind relația *dinamică* între GDL active și cele omise, printr-o relație *statică*, reducerea Guyan/Irons este o extindere incompletă a condensării statice, cu reducerea inerentă a preciziei.

Există o singură excepție: modelul cu mase punctuale, care are mase concentrate în nodurile unde sunt definite deplasările de translație (la care se neglijează momentele de inerție masice). Cu toate GDL de rotire omise și toate GDL de translație considerate active,

$$[M_{oo}] = [0], [M_{oa}] = [0], [M_{ao}] = [0], [M^{red}] = [M_{aa}]$$

și reducerea Guyan/Irons este exactă.

Dezavantaje: a) aplicarea greșită poate conduce la erori mari de modelare; b) se distruge forma de bandă a matricilor; c) la partiționarea GDL este nevoie de experiență și abilitate, deși există metode de selectare automată a GDL active. În concluzie, precizia care se obține cu un model cu elemente finite detaliat poate fi mult micșorată prin utilizarea reducerii Guyan/Irons.

5.8.1.3 Utilizarea macroelementelor

Arborii în rotație au secțiune transversală variabilă și de obicei, pentru a modela cât mai corect rotorul, este necesar un număr mare de elemente finite. Numărul elementelor poate fi redus prin utilizarea macroelementelor [5.9]. Un grup format din mai multe elemente cilindrice scurte poate fi tratat ca un singur element. Formal, aceasta se realizează prin condensare statică, tratând coordonatele extreme ca GDL active și coordonatele interioare ca GDL omise. În acest mod scade efortul de calcul numeric fără o micșorare a preciziei rezultatelor.

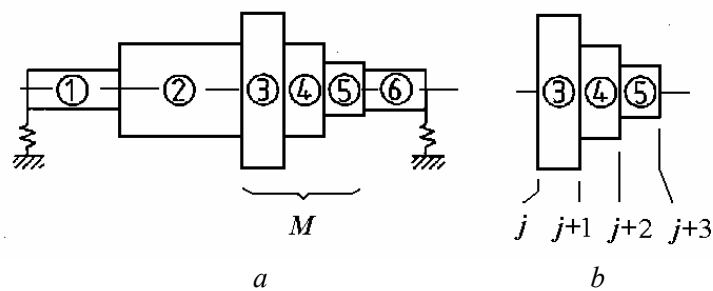


Fig. 5.37

Pentru arborele în trepte din fig. 5.37, *a*, un macroelement posibil este arătat în fig. 5.37, *b*. Considerând numai mișcarea în planul $Y-X$, matricea de dimensiuni 8×8 a macroelementului are formă de bandă (fig. 5.38). Rearanjând deplasările nodale, mutând sus GDL externe alese ca GDL active și mutând jos GDL interne selectate ca GDL omise, se distruge forma de bandă.

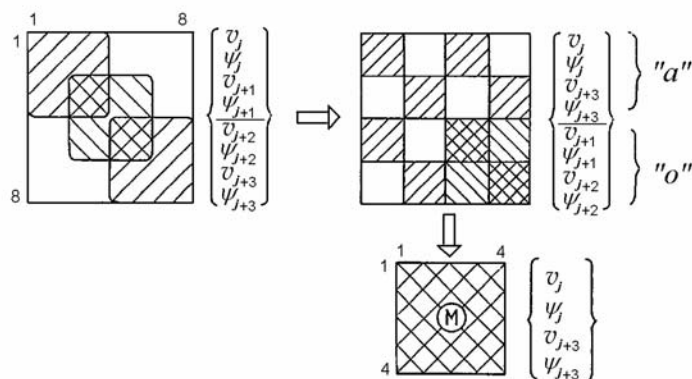


Fig. 5.38

Eliminarea GDL interne utilizând transformarea (5.85) produce o matrice condensată de ordinul 4×4 . Aceasta permite menținerea structurii de bandă a matricii sistemului (fig. 5.39).

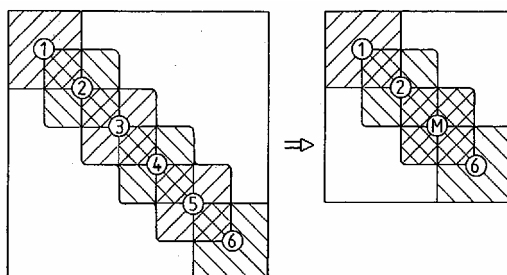


Fig. 5.39

5.8.1.4 Condensarea modală

Se consideră partea omogenă a ecuației (5.50) a unui sistem rotoric anizotrop amortizat, scrisă sub forma

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([C^b] + \Omega[G])\{\dot{x}\} + ([K^s] + [K^b])\{x\} = \{0\}, \quad (5.106)$$

în care $[K^b]$ și $[C^b]$ sunt matricile de rigiditate și de amortizare ale lagărelor, $[K^s]$ este matricea de rigiditate a arborelui, $[G]$ este matricea giroscopică a arborelui și discurilor, $[M]$ este matricea de masă, și $\{x\}$ este vectorul de stare, de dimensiuni $4n \times 1$.

Problema corespunzătoare complexă de valori proprii dă pulsațiile proprii amortizate și vectorii proprii complecși. La sisteme rotorice cu un număr mare de

GDL, algoritmul de calcul al valorilor proprii complexe poate întâmpina dificultăți numerice și poate mări timpul de calcul.

O metodă pentru evitarea acestor probleme este *condensarea modală*. O variantă se bazează pe analiza părții negiroscopice neamortizate izotrope a ecuației (5.106) în planul $Y-X$:

$$[m]\{\ddot{Y}\} + [k + k_{yy}]\{Y\} = \{0\}. \quad (5.107)$$

Se presupune că arborele este axial-simetric, se neglijează efectele giroscopice și amortizarea din lagăre, și se consideră doar o rigiditate medie principală a lagărelor, de obicei componenta simetrică din relația (5.37). Acest sistem conservativ asociat are moduri de precesie neamortizate plane, definite de vectori proprii care sunt coloanele matricii modale

$$[\bar{\Phi}] = [\{\bar{\Phi}_1\} \ \{\bar{\Phi}_2\} \ \dots \ \{\bar{\Phi}_{2n}\}]. \quad (5.108)$$

Cu primele L moduri de precesie ale sistemului descris de (5.107), se formează o matrice modală trunchiată utilizată ca matrice de transformare.

Reținând primele L coloane ale matricii (5.108) rezultă

$$[\bar{\Phi}^*] = [\{\bar{\Phi}_1\} \ \{\bar{\Phi}_2\} \ \dots \ \{\bar{\Phi}_L\}]. \quad (5.109)$$

Transformarea de coordonate este

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{Y\} \\ \{Z\} \end{Bmatrix} = [\bar{\Phi}^*] \begin{Bmatrix} \{u_y\} \\ \{u_z\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{\Phi}^*] & [0] \\ [0] & [\bar{\Phi}^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_y\} \\ \{u_z\} \end{Bmatrix} = [\Phi^*] \{u\} \quad (5.110)$$

unde $\{u\}$ este vectorul de stare redus.

Înlocuind (5.110) în (5.106) și înmulțind la stânga cu $[\Phi^*]^T$ se obține sistemul redus al ecuațiilor de mișcare (5.97)

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \circ & \\ & & & \circ \end{bmatrix}}_{[M^{\text{red}}]} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \circ \\ \circ \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}}_{[C^{\text{red}}]} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \circ \\ \circ \end{Bmatrix} + \\ & + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \circ & \\ & & & \circ \end{bmatrix}}_{[K^{\text{red}}]} + \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \circ \\ \circ \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{Bmatrix}}_{\{f^{\text{red}}\}} \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} [M^{red}] &= [\Phi^*]^T [M] [\Phi^*], \quad \{f^{red}\} = [\Phi^*]^T \{f\}, \\ [C^{red}] &= [\Phi^*]^T ([C^b] + [G]) [\Phi^*], \\ [K^{red}] &= [\Phi^*]^T ([K^s] + [K^b]) [\Phi^*]. \end{aligned} \quad (5.111)$$

După determinarea coordonatelor modale $\{u\}$, coordonatele fizice se calculează cu relația (5.110).

Pentru a determina cu precizie primele 2-3 valori proprii ale căror părți imaginare să fie situate în domeniul turațiilor de lucru ale mașinii, trebuie utilizați până la 10-12 vectori modali $\{\bar{\Phi}_j\}$. În plus, se pot introduce coeficienți de amortizare modală diagonali care să țină cont de amortizarea structurală și externă.

Metoda modală nu necesită o intuiție asupra concentrării masei, alegerii modurilor componente, și procedurilor iterative de îmbunătățire a matricii de transformare. Singura ipoteză de bază presupune că, prin combinarea liniară a vectorilor Ritz obținuți pentru sistemul rotoric izotrop neamortizat, se poate obține o bună aproximare a vectorilor proprii complecși ai sistemului rotoric anizotrop puternic amortizat.

5.8.2 Substructurarea modelului

Sistemul rotor-stator-fundație poate fi divizat în *componente* sau *substructuri*, analizând componentele separat, și cuplându-le apoi pentru a obține modelul matematic al întregului sistem. Metodele de *sinteză a modurilor componente* (SMC) sau *cuplarea substructurilor* în vederea analizei dinamice sunt utilizate pentru sintetizarea ecuațiilor sistemului pe baza modurilor de deplasare caracteristice ale componentelor.

În metoda SMC, deplasarea unui punct oarecare al unei componente este reprezentată ca suprapunerea a două tipuri de moduri componente: a) *moduri normale constrânse* (constrained normal modes), care definesc deplasările față de interfețele (marginile) fixe ale componentelor, și b) *moduri de constrângere* (constraint modes), produse prin deplasarea coordonatelor de la margini. În plus, coordonatele oricărei componente pot fi clasificate în: a) *coordonate de interfață (de joncțiune)*, dacă sunt comune pentru două sau mai multe componente, și b) *coordonate interioare*, dacă nu se află la interfața cu altă componentă.

Modurile de constrângere *statice* se determină dând pe rând fiecărei coordonate de interfață o deplasare egală cu 1, fixând celelalte coordonate și pemițând deplasarea în coordonatele interioare. Modurile normale constrânse

dinamice se obțin fixând toate coordonatele de interfață și determinând modurile vibrațiilor libere ale componentei constrânse.

Reducerea numărului GDL ale sistemului se face prin modurile normale constrânse. Se presupune că răspunsul sistemului poate fi determinat cu suficientă precizie reținând doar un număr redus de moduri normale constrânse judicios alese. Fiecare componentă este transformată în funcție de modurile sale normale constrânse și asamblată într-un sistem de ecuații de mișcare de ordin redus.

Analiza unui sistem complet rotor-lagăre-fundație depășește scopul acestei prezentări. Se va considera doar subsistemul rotor-lagăre pentru a sublinia etapele unei analize SMC a unei substructuri [5.9].

Se consideră un arbore cu secțiunea constantă (fig. 5.40) rezemat în trei lagăre. Neglijând efectele de cuplaj, se consideră doar vibrația în planul $Y-X$.

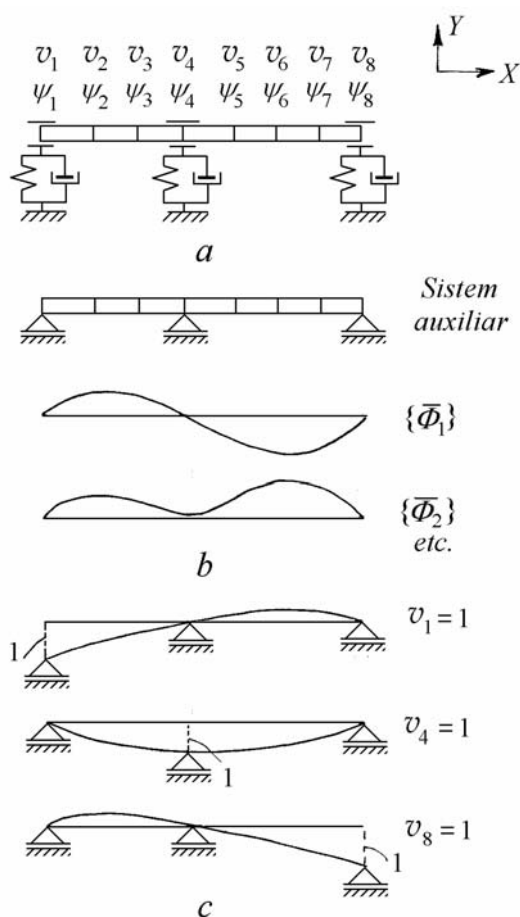


Fig. 5.40

Arborele este modelat cu 7 elemente finite de grindă. Cele 16 coordonate nodale sunt notate $v_1, v_2, \dots, v_8, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_8$ (v. partea de sus a fig. 5.40, a).

Coordonatele v_1, v_4 și v_8 se aleg GDL active, restul coordonatelor fiind GDL omise:

$$\{Y_a\} = \{v_1 \ v_4 \ v_8\}^T,$$

$$\{Y_o\} = \{\psi_1 \ v_2 \ \psi_2 \ v_3 \ \psi_3 \ \psi_4 \ v_5 \ \psi_5 \ v_6 \ \psi_6 \ v_7 \ \psi_7 \ \psi_8\}^T.$$

Vectorul global al deplasărilor se ordonează cu GDL active în partea de sus

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \{Y_a\} \\ \{Y_o\} \end{Bmatrix}. \quad (5.112)$$

Ecuția de mișcare se poate scrie partiționat sub forma

$$\begin{bmatrix} [m_{aa}] & [m_{ao}] \\ [m_{oa}] & [m_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{Y}_a\} \\ \{\ddot{Y}_o\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [c_{aa}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{Y}_a\} \\ \{\dot{Y}_o\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_{aa}] & [k_{ao}] \\ [k_{oa}] & [k_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Y_a\} \\ \{Y_o\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{y_a}\} \\ \{F_{y_o}\} \end{Bmatrix}. \quad (5.113)$$

Structura matricilor este prezentată în fig. 5.41, unde porțiunile hașurate corespund arborelui iar cercurile provin de la lagăre.

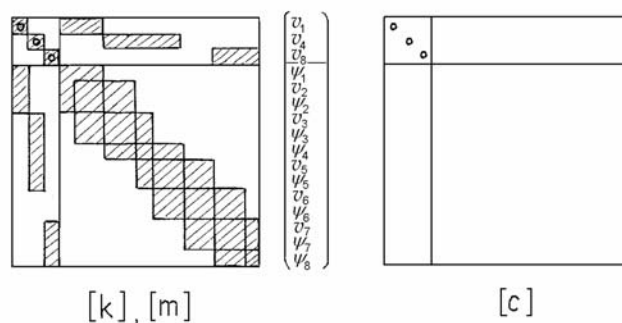


Fig. 5.41

5.8.2.1 Moduri normale constrânse

Dacă se blochează deplasările de translație în lagăre (coordoanatele de interfață), atunci $v_1 = v_4 = v_8 = 0$, $\{Y_a\} = \{0\}$ și ecuația (5.113) se reduce la cea a sistemului auxiliar conservativ. Prin rezolvarea problemei de valori proprii, din forma omogenă

$$[m_{oo}] \{ \ddot{Y}_o \} + [k_{oo}] \{ Y_o \} = \{ 0 \} \quad (5.114)$$

se obțin așa-numitele “moduri normale constrânse”, adică vectorii proprii $\{ \bar{\Phi}_j \}$ ($j = 1, \dots, 13$) ai arborelui rezemat rigid (constrâns) (fig. 5.40, b).

Prin trunchierea acestor moduri componente, se formează o matrice de transformare utilizând, de exemplu, numai 5 vectori (din totalul de 13) într-o matrice modală redusă

$$[\bar{\Phi}^*] = [\{ \bar{\Phi}_1 \} \quad \{ \bar{\Phi}_2 \} \quad \dots \quad \{ \bar{\Phi}_5 \}]. \quad (5.115)$$

Transformarea de coordonate se scrie sub forma

$$\underbrace{\{ Y_o \}}_{13 \times 1} = \underbrace{[\Phi^*]}_{13 \times 5} \underbrace{\{ q \}}_{5 \times 1}, \quad (5.116)$$

unde $\{ q \}$ este vectorul coloană al *coordonatelor modale constrânse*.

Din relațiile (5.112) și (5.116) se obține

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_4 \\ v_8 \\ \hline \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_7 \\ \psi_8 \end{Bmatrix}}_{(16 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & [0] \\ 1 & \\ 1 & \\ \hline [0] & [\bar{\Phi}^*] \end{bmatrix}}_{(16 \times 8)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \{ Y_a \} \\ \hline \{ q \} \end{Bmatrix}}_{(8 \times 1)}. \quad (5.117)$$

5.8.2.2 Moduri de constrângere

Comportarea statică a arborelui rezemat rigid este descrisă de partea statică a ecuației (5.113), în care $\{ F_{y_o} \} = \{ 0 \}$

$$\begin{bmatrix} [k_{aa}] & [k_{ao}] \\ [k_{oa}] & [k_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ Y_a \} \\ \{ Y_o \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ F_{y_a} \} \\ \{ 0 \} \end{Bmatrix}. \quad (5.118)$$

Coordonatele interioare $\{Y_o\}$ pot fi exprimate în funcție de coordonatele de interfață $\{Y_a\}$ utilizând partea inferioară a ecuației (5.118)

$$[k_{oa}]\{Y_a\} + [k_{oo}]\{Y_o\} = \{0\}.$$

Aceasta se mai poate scrie

$$\{Y_o\} = -[k_{oo}]^{-1}[k_{oa}]\{Y_a\} = [\bar{\Phi}_{stat}]\{Y_a\}. \quad (5.119)$$

“Modurile de constrângere” sunt coloane ale matricii $\begin{bmatrix} [I_a] & [\bar{\Phi}_{stat}]^T \end{bmatrix}^T$ în care

$$[\bar{\Phi}_{stat}] = -[k_{oo}]^{-1}[k_{oa}]. \quad (5.120)$$

Modurile de constrângere statică se generează producând pe rând o deplasare egală cu 1 în fiecare coordonată de interfață, cu restul coordonatelor blocate și toate coordonatele interioare neconstrânse și neîncărcate (fig. 5.40, c). Ele reprezintă *funcții de formă globale* sau *vectori Ritz*.

5.8.2.3 Condensarea combinată statică și modală

Prin combinarea modurilor normale constrânse $[\bar{\Phi}^*]$ cu modurile de constrângere $[\bar{\Phi}_{stat}]$ se obține o transformare modală a coordonatelor fizice ale unei componente a sistemului. Relația (5.117) devine

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_4 \\ v_8 \\ \hline \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_7 \\ \psi_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_a] & [0] \\ \hline [\bar{\Phi}_{stat}] & [\bar{\Phi}^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Y_a\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}. \quad (5.121)$$

sau

$$\{Y\} = [T]\{u\}. \quad (5.122)$$

Înlocuind (5.122) în (5.113) și înmulțind la stânga cu $[T]^T$ se obține un sistem redus de ecuații de mișcare

$$\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_a \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Y}_a \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_a \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad (5.123)$$

$[m^{red}] \quad [c^{red}] \quad [k^{red}]$

care poate fi scris

$$\begin{bmatrix} m_{aa}^{red} & m_{aq}^{red} \\ m_{qa}^{red} & m_{qq}^{red} \end{bmatrix} \{ \ddot{u} \} + \begin{bmatrix} c_{aa} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \{ \dot{u} \} + \begin{bmatrix} k_{aa}^{red} & [0] \\ [0] & k_{qq}^{red} \end{bmatrix} \{ u \} = \{ \vdots \},$$

unde

$$\begin{aligned} [k_{aa}^{red}] &= [k_{aa}] - [k_{ao}] [k_{oo}]^{-1} [k_{oa}], \\ [k_{qq}^{red}] &= [\bar{\Phi}^*]^T [k_{oo}] [\bar{\Phi}^*], \\ [c_{aa}^{red}] &= [c_{aa}], \\ [m_{qq}^{red}] &= [\bar{\Phi}^*]^T [m_{oo}] [\bar{\Phi}^*], \\ [m_{qa}^{red}] &= [\bar{\Phi}^*]^T ([m_{oo}] [\Phi_{stat}] + [m_{oa}]), \\ [m_{aq}^{red}] &= [m_{qa}^{red}]^T, \\ [m_{aa}^{red}] &= [\Phi_{stat}]^T ([m_{oo}] [\Phi_{stat}] + [m_{oa}]) + [m_{ao}] [\Phi_{stat}] + [m_{aa}], \end{aligned} \quad (5.124)$$

După stabilirea ecuațiilor trunchiate ale fiecărei componente a sistemului, următorul pas constă în asamblarea lor pentru a forma ecuațiile trunchiate ale întregului sistem. Prin rezolvarea acestora se obține vectorul coordonatelor sistemului, compus din coordonatele de interfață ale sistemului și coordonatele modale constrânse ale fiecărei componente.

Calculule ulterioare se pot face utilizând ecuațiile în forma de ordinul întâi.

În concluzie, în metodele de sinteză Craig-Bampton a modurilor componentelor, deplasarea într-un punct oarecare al unei componente este reprezentată prin suprapunerea a două tipuri de moduri de deplasare: a) *moduri*

normale constrânse – deplasări față de interfețele blocate ale componentei, și b) *moduri de constrângere statică* - deplasări produse prin deplasarea interfețelor.

Numărul gradelor de libertate ale sistemului este micșorat prin trunchierea numărului modurilor normale constrânse. De obicei, întâi se trunchiază modurile puternic amortizate sau amortizate supracritic, apoi modurile cu frecvențele proprii cele mai înalte.

5.8.3 Metode de reducere pas cu pas a modelului

În reducerea statică (Guyan/Irons) se neglijează termenii asociați cu gradele de libertate omise (GDL-o). În metoda denumită *Improved Reduced System* (IRS), se ține cont și de efectele inerțiale ale GDL-o. Robustețea metodei depinde de observabilitatea structurii din gradele de libertate selectate ca active (GDL-a). Metoda iterativă IRS (IIRS) se bazează pe eliminarea în serie a GDL-o și selectarea automată a numărului și amplasării GDL-a [5.10]. Metoda IIRS converge spre un model redus care reproduce o parte a caracteristicilor modelului modal al întregului sistem.

În ecuațiile de mișcare (5.50) ale unui sistem rotor-lagăre amortizat, matricile au dimensiuni $4 \times N$, unde N este numărul nodurilor în modelul cu elemente finite. La un sistem complex cu multe grade de libertate, aceasta conduce la o problemă de valori proprii de dimensiuni mari, deși numai câteva dintre primele valori și vectori proprii sunt de interes practic.

Pentru a reduce dimensiunile problemei de valori proprii, mai întâi se consideră partea omogenă conservativă negiroscopică a ecuației (5.50)

$$[\bar{M}] \{\ddot{\bar{x}}\} + [\bar{K}] \{\bar{x}\} = \{0\}, \quad (5.125)$$

în care $[\bar{M}]$ și $[\bar{K}]$ sunt componentele simetrice ale matricilor $[M]$ și $[K]$.

Coordonatele fizice din vectorul $\{x\}$ sunt eliminate una câte una. Criteriul de eliminare este valoarea raportului k_{jj}/m_{jj} al elementelor diagonale ale matricilor $[\bar{M}]$ și $[\bar{K}]$. GDL în care acest raport are valoarea cea mai mare se notează x_o și este mutat în poziția cea mai de jos a vectorului deplasărilor în vederea eliminării.

Ecuția (5.125) poate fi rescrisă

$$[P]^T [\bar{M}] [P] [P]^T \{\ddot{\bar{x}}\} + [P]^T [\bar{K}] [P] [P]^T \{\bar{x}\} = \{0\},$$

unde $[P]$ este o matrice de permutare.

Ecuția poate fi partiționată sub forma

$$\begin{bmatrix} [M_{aa}] & \{M_{ao}\} \\ [M_{oa}] & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}_a\} \\ \ddot{x}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{aa}] & \{K_{ao}\} \\ [K_{oa}] & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ x_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.126)$$

în care x_o , K_{oo} și M_{oo} sunt scalari, iar $\{x_a\}$ este vectorul coloană al GDL active rămase. Dacă mai multe GDL au același raport k_{jj}/m_{jj} , atunci cel cu indicele cel mai mic este considerat primul. Dacă acest raport este mai mare decât o anumită valoare limită ω_c^2 , atunci GDL respectiv este eliminat.

5.8.3.1 Reducerea Guyan pas cu pas (SGR - *Stepwise Guyan Reduction*)

Utilizând partea statică a ecuației (5.126), se obține o ecuație de legătură între gradul de libertate omis și vectorul coloană al GDL active

$$x_o = -K_{oo}^{-1} [K_{oa}] \{x_a\} = [G_{oa}^{ST}] \{x_a\}.$$

Reducerea la GDL active în metoda SGR este definită astfel

$$\begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ x_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_a] \\ [G_{oa}^{ST}] \end{bmatrix} \{x_a\} = [T_S] \{x_a\}, \quad \{\bar{x}\} = [P] [T_S] \{x_a\}.$$

După un pas de reducere, ecuația (5.125) redusă prin metoda SGR devine

$$[M_{ST}] \{\ddot{x}_a\} + [K_{ST}] \{x_a\} = \{0\}, \quad (5.127)$$

în care

$$[M_{ST}] = [T_S]^T [P]^T [\bar{M}] [P] [T_S], \quad [K_{ST}] = [T_S]^T [P]^T [\bar{K}] [P] [T_S].$$

Fiecare pas de reducere este caracterizat de produsul $[P][T_S]$. Întregul proces este descris printr-o matrice de transformare de forma

$$[T] = ([P][T_S])_1 ([P][T_S])_2 \dots ([P][T_S])_n$$

unde n este numărul GDL omise.

La sfârșitul eliminării pas cu pas a GDL omise, matricile globale reduse sunt

$$[M_{red}] = [T]^T [M] [T], \quad [K_{red}] = [T]^T [K] [T], \quad [C_{red}] = [T]^T [C] [T], \quad (5.128)$$

unde s-a utilizat aceeași matrice $[T]$ pentru a reduce în $[C]$ matricea giroscopică și cea de amortizare.

Reducerea coordonatelor fizice este descrisă de

$$\{x\} = [T]\{x_{red}\}. \quad (5.129)$$

După rezolvarea problemei de valori proprii reduse, vectorii modali compleți se obțin prin expandare, utilizând metoda inversă SGR (ISGR) bazată pe transformarea (5.129).

5.8.3.2 Reducerea îmbunătățită pas cu pas (SIR)

Înlocuind vectorul accelerațiilor din ecuația (5.127)

$$\{\ddot{x}_a\} = -[M_{ST}]^{-1}[K_{ST}]\{x_a\},$$

și accelerația scalară

$$\ddot{x}_o = K_{oo}^{-1}[K_{oa}][M_{ST}]^{-1}[K_{ST}]\{x_a\}$$

în partiția inferioară a ecuației (5.126), se obține o nouă relație de legătură între GDL omis și vectorul coloană al GDL active

$$x_o = [G_{oa}^{(1)}]\{x_a\}$$

în care

$$[G_{oa}^{(1)}] = -K_{oo}^{-1} \left[[K_{oa}] - \left([M_{oa}] + M_{oo} [G_{oa}^{ST}] \right) [M_{ST}]^{-1} [K_{ST}] \right]. \quad (5.130)$$

În metoda SIR, reducerea la GDL active este definită prin

$$\begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ \{x_o\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_a] \\ [G_{oa}^{(1)}] \end{bmatrix} \{x_a\} = [T_1]\{x_a\}, \quad \{\bar{x}\} = [P][T_1]\{x_a\}.$$

După un pas de reducere, ecuația de mișcare omogenă redusă este

$$[M_1]\{\ddot{x}_a\} + [C_1]\{\dot{x}_a\} + [K_1]\{x_a\} = \{0\},$$

unde

$$[M_1] = [T_1]^T [P]^T [M] [P] [T_1], \quad [K_1] = [T_1]^T [P]^T [K] [P] [T_1],$$

$$[C_1] = [T_1]^T [P]^T [C] [P] [T_1].$$

Matricea de transformare SIR are forma

$$[T] = ([P][T_1])_1 ([P][T_1])_2 \dots ([P][T_1])_n \quad (5.131)$$

iar matricile globale ale sistemului redus sunt date de (5.128).

Expandarea vectorilor modali se face cu metoda inversă SIR (ISIR) bazată pe transformarea (5.129) în care matricea $[T]$ este dată de (5.131).

5.8.3.3 Reducerea îmbunătățită prin iterație pas cu pas (SIIR)

Dacă se repetă înlocuirea accelerațiilor $\{\ddot{x}_a\}$ și \ddot{x}_o în ecuația (5.126), ecuația de legătură pentru iterațiile următoare devine

$$x_o = [G_{oa}^{(i+1)}] \{x_a\},$$

în care

$$[G_{oa}^{(i+1)}] = -K_{oo}^{-1} \left([K_{oa}] - ([M_{oa}] + M_{oo} [G_{oa}^{(i)}]) [M_i]^{-1} [K_i] \right).$$

Reducerea la GDL active devine

$$\begin{Bmatrix} \{x_a\} \\ \{x_o\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_a] \\ [G_{oa}^{(i)}] \end{bmatrix} \{x_a\} = [T_i] \{x_a\}, \quad \{\bar{x}\} = [P] [T_i] \{x_a\},$$

în care indicele i denotă iterația i . După un pas de reducere, ecuația de mișcare omogenă SIIR a sistemului giroscopic amortizat este

$$[M_i] \{\ddot{x}_a\} + [C_i] \{\dot{x}_a\} + [K_i] \{x_a\} = \{0\},$$

unde

$$[M_i] = [T_i]^T [P]^T [M] [P] [T_i], \quad [K_i] = [T_i]^T [P]^T [K] [P] [T_i],$$

$$[C_i] = [T_i]^T [P]^T [C] [P] [T_i]. \quad (5.132)$$

În fiecare pas de reducere, efectul GDL omis eliminat este redistribuit tuturor celorlalte GDL active rămase, astfel încât următoarea reducere va elimina GDL cu raportul k_{jj}/m_{jj} de valoare maximă al elementelor diagonale ale matricilor de masă și de rigiditate. Procedeeul se aplică până raportul k_{jj}/m_{jj} cu valoarea maximă este egal sau mai mic decât ω_c^2 . În acest stadiu, GDL active reprezintă GDL selectate ale modelului redus.

Într-adevăr, în cazul excitației armonice cu pulsația ω , din partiția inferioară a ecuației (5.126) rezultă

$$x_o = -K_{oo}^{-1} \left(1 - \omega^2 K_{oo}^{-1} M_{oo} \right)^{-1} \left([K_{oa}] - \omega^2 [M_{oa}] \right) \{x_a\}. \quad (5.133)$$

Dacă prima paranteză din (5.133) este aproximată prin dezvoltarea binomială trunchiată

$$\left(1 - \omega^2 K_{oo}^{-1} M_{oo} \right)^{-1} \cong \left(1 + \omega^2 K_{oo}^{-1} M_{oo} \right) \quad (5.134)$$

și termenii în ω^4 sunt ignorați, se obține o relație de legătură (constrângere)

$$x_o = -K_{oo}^{-1} \left[[K_{oa}] - \omega^2 \left([M_{oa}] + M_{oo} [G_{oa}^{ST}] \right) \right] \{x_a\} . \quad (5.135)$$

Dacă $\{x_a\}$ este un mod propriu al problemei conservative reduse, relația (5.135) devine relația (5.130). Însă egalitatea (5.134) este valabilă doar pentru pulsații $\omega^2 \ll K_{oo}/M_{oo}$. Înseamnă că dacă se stabilește o limită ω_c^2 , atunci eliminarea GDL omise se poate face până raportul K_{oo}/M_{oo} este egal sau mai mic decât această valoare. În acest mod, se determină automat numărul și amplasarea GDL active.

La sistemele negiroscopice conservative, metoda SIIR converge monoton spre un model redus care are aceleași valori proprii joase și vectorii proprii respectivi reduși ai sistemului inițial. La sisteme giroscopice amortizate, reducerea arbitrară a matricilor de amortizare și giroscopică în (5.132) poate conduce la o îmbunătățire a preciziei de predicție a metodei SIR pentru unele moduri proprii.

După rezolvarea problemei reduse de valori proprii, se utilizează relația (5.129) în metoda inversă SIIR (ISIIR) pentru expandarea vectorului GDL active la dimensiunea problemei complete, utilizând matricea de transformare

$$[T] = ([P][T_i])_1 ([P][T_i])_2 \dots ([P][T_i])_n ,$$

în care indicele i este numărul de iterații în metoda SIIR.

O măsură a preciziei formelor modale expandate este dată de eroarea relativă a formelor modale

$$\left\| \text{abs}(\Phi_{FEM}) - \text{abs}(\Phi_{expanded}) \right\| / \left\| \Phi_{FEM} \right\| \cdot 100 (\%) .$$

Exemplul 5.1

În figura 5.42 se prezintă rotorul cu un disc și arbore în trepte, rezemat în două lagăre izotrope identice, din lucrarea [5.8]. Rotorul a fost modelat cu 18 elemente de tip Timoshenko, având în total 76 GDL, incluzând efectele giroscopice și neglijând amortizarea internă [5.11]. Metoda de condensare, aplicată cu o pulsație limită $\omega_c = 8000 \text{ rad/s}$, a selectat 8 GDL active: 3, 9, 25, 33, 41, 47, 63, 71.

Frecvențele proprii amortizate, calculate la turația $n = 30000 \text{ rpm}$, sunt date în Tabelul 5.3. Valorile "adevărate", prezentate în coloana a doua, sunt calculate pentru problema completă de valori proprii (76 GDL). Frecvențele proprii calculate cu metodele SGR, SIR și SIIR sunt date în coloanele trei, patru și cinci. Cele 8 GDL de translație reprezintă deplasările în 4 noduri, GDL active selectate într-un plan fiind selectate și în celălalt plan.

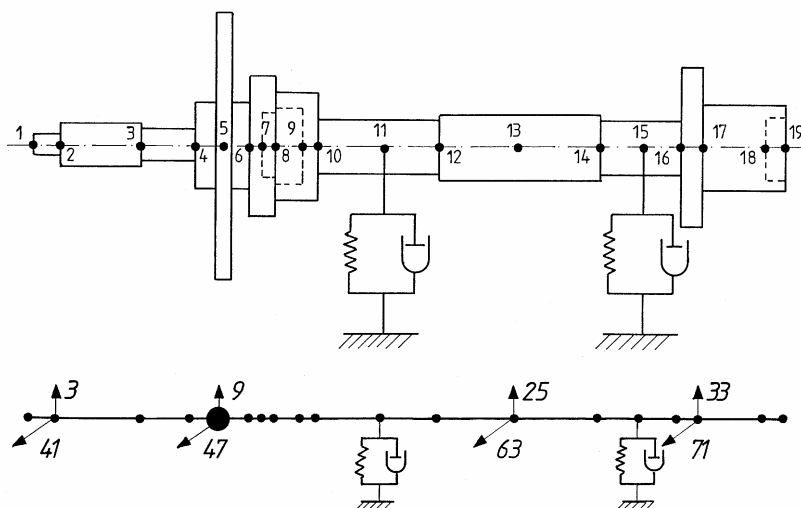


Fig. 5.42

În coloanele șase, șapte și opt se prezintă eroarea relativă a formelor modale expandate calculate prin metoda inversă reducerii pas cu pas. La unele moduri, iterațiile din SIIR (și ISIIR) nu îmbunătățesc valorile calculate în SIR (și ISIR).

Tabelul 5.3

Modul	Frecvența proprie amortizată, Hz				Eroarea formei modale, %		
	“Adevărată” MEF	SGR	SIR	SIIR 5 iterații	ISGR	ISIR	ISIIR 5 iterații
1	246,01	246,78	246,27	246,21	2,04	1,46	1,32
2	296,49	296,91	296,81	296,74	1,54	1,82	1,66
3	774,00	777,26	773,00	772,79	3,59	1,07	1,23
4	808,31	808,38	807,32	807,20	2,16	0,91	1,12
5	1165,7	1287,3	1174,9	1166,8	24,96	7,57	3,44
6	1367,4	1425,4	1366,1	1369,7	14,71	0,69	3,35
7	1959,9	1997,6	1960,0	1958,7	3,59	1,26	0,57
8	2020,6	2054,1	2020,0	2020,7	3,29	0,61	0,53

Exemplul 5.2

În fig. 5.43 se prezintă rotorul cu trei lagăre și patru discuri din [5.12] cu diametre interioare diferite. Rotorul a fost modelat cu 13 noduri (52 GDL), utilizând elemente de arbore Timoshenko cu matrici coerente de masă și giroscopice.

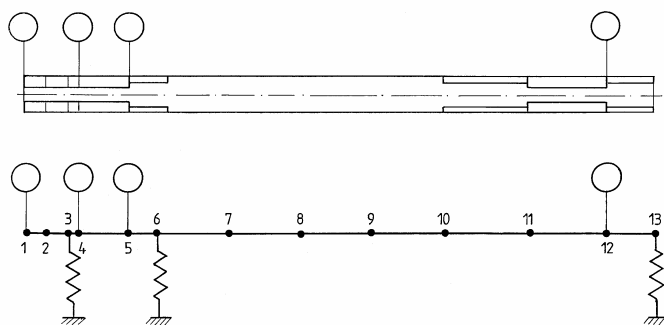


Fig. 5.43

Procedura de condensare, aplicată cu o pulsație limită $\omega_c = 3000 \text{ rad/s}$, a selectat 24 GDL active. Continuând reducerea, pentru a reține numai 8 GDL active, utilizând criteriul K/M , au fost selectate cele patru GDL ale nodului 1, și GDL de translație ale nodurilor 10 și 12 [5.11].

Tabelul 5.4

Modul	Frecvențele proprii amortizate, Hz				Eroarea formei modale, %		
	Adevărate MEF	SGR	SIR	SIIR	ISGR	ISIR	ISIIR
1	46,391	46,419	46,395	46,394	0,28	0,10	0,07
2	59,573	59,611	59,580	59,578	0,50	0,13	0,09
3	178,44	179,77	178,42	178,40	4,71	0,17	0,10
4	179,41	180,76	179,39	179,38	4,83	0,19	0,07
5	380,29	399,07	380,75	380,40	18,5	3,33	1,31
6	441,37	469,27	443,79	441,66	34,2	9,59	3,11
7	461,39	507,28	463,35	459,26	43,5	13,8	1,21
8	463,96	508,54	465,16	461,70	46,7	14,1	1,70

În Tabelul 5.4 se dau frecvențele proprii amortizate calculate la turația 3000 rot/min pentru primele 8 moduri de precesie. Din nou, prin metoda SIIR se obține o precizie foarte bună în doar 5 iterații. Expandarea formelor modale prin metoda ISIIR dă rezultate excelente.

Exemplul 5.3

Metodele de condensare expuse au fost aplicate rotorului vertical al unui agregat hidroelectric Kaplan (fig. 5.44) studiat în [5.13]. Arborele a fost modelat cu 14

elemente Timoshenko (60 GDL) și s-au considerat proprietăți echivalente constante pentru cele trei lagăre orizontale [5.11].

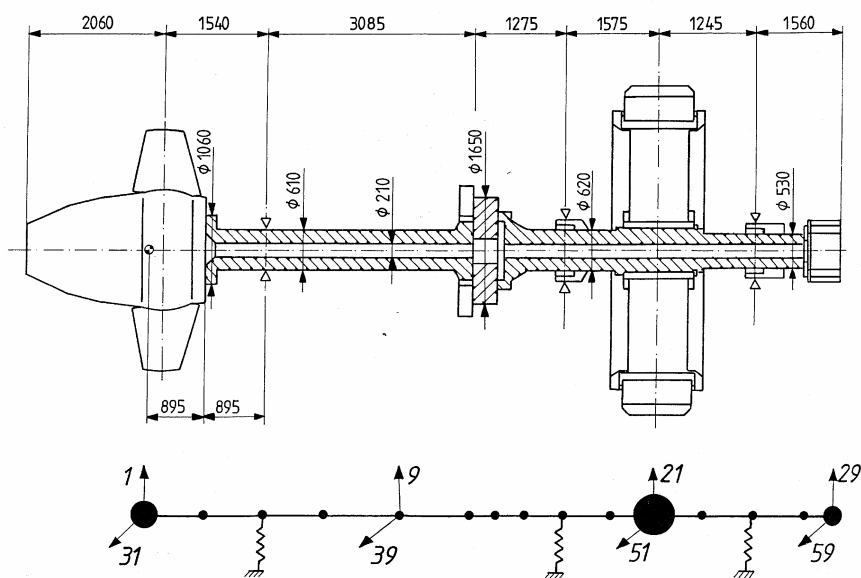


Fig. 5.44

Utilizând o pulsație limită $\omega_c = 500$ rad/s, au fost selectate următoarele GDL active: 1, 9, 21, 29, 31, 39, 51, 59, șase dintre ele pentru cele trei mase mari: turbina, generatorul și rotorul auxiliar. Primele opt frecvențe proprii, calculate la turația 3000 rot/min, sunt listate în Tabelul 5.5 împreună cu eroarea relativă a formelor modale expandate.

Tabelul 5.5

Modul	Frecvența proprie amortizată, Hz				Eroarea formei modale, %		
	Adevărată MEF	SGR	SIR	SIIR	ISGR	ISIR	ISIIR
1	25.337	25.357	25.368	25.371	1.21	1.49	1.61
2	28.762	28.884	28.799	28.796	2.91	1.61	1.58
3	38.092	38.681	38.084	38.084	9.54	0.38	0.71
4	38.386	38.946	38.389	38.379	10.3	1.50	0.75
5	45.026	45.779	45.040	45.045	7.94	1.37	1.68
6	47.195	48.015	47.245	47.226	8.49	2.59	2.02
7	65.724	66.776	65.774	65.705	7.43	2.38	0.90
8	68.203	69.263	68.203	68.198	6.88	1.20	0.95

Bibliografie

- 5.1 Ehrich, F. F. (ed.), *Handbook of Rotordynamics*, McGraw Hill, New York, 1992.
- 5.2 Lalanne, M., Ferraris, G., Tran, D. M., Quéau, J. P. and Berthier, P., *Comportement dynamique des rotors de turbomachines*, I.N.S.A. Lyon, 1982.
- 5.3 Marguerre, K. and Wölfel, H., *Mechanics of Vibration*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1979.
- 5.4 Genta, G. and Gugliotta, A., *A conical element for finite element rotor dynamics*, J. Sound Vib., vol.120, no. 1, p. 175-182, 1988.
- 5.5 Lee, C.-W., *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1993.
- 5.6 Someya, T. (ed), *Journal-Bearing Databook*, Springer, Berlin, 1988.
- 5.7 Childs, D., *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling and Analysis*, Wiley, 1993.
- 5.8 Wang, W. and Kirkhope, J., *New eigensolutions and modal analysis for gyroscopic/rotor systems*, Part I: *Undamped systems*, J. Sound Vib., vol.175, no.2, p. 159-170, 1994.
- 5.9 Gasch, R. and Knothe, K., *Strukturdynamik, Band 2, Kontinua und ihre Diskretisierung*, Springer, Berlin, 1989.
- 5.10 Shah, V. N. and Raymund, M., *Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem*, Int. J. Num. Methods in Engineering, vol.18, p. 89-98, 1982.
- 5.11 Radeş, M., *Rotor-bearing model order reduction*, Proc. 5th Int. IFToMM Conference on Rotor Dynamics, Darmstadt, Sept 7-10, Vieweg, p. 148-159, 1998.
- 5.12 Rajan, M., Rajan, S. D., Nelson, H. D. and Chen, W. J., *Optimal placement of critical speeds in rotor-bearing systems*, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, vol.109, p. 152-157, 1987.
- 5.13 Gmür, T. C. and Rodrigues, J. D., *Shaft finite elements for rotor dynamics analysis*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, vol.113, p. 482-493, 1991.

6.

LAGĂRE HIDRODINAMICE ȘI ETANȘĂRI

În acest capitol se face o scurtă prezentare a lagărelor radiale hidrodinamice și etanșărilor inelare utilizate în mașinile rotative. Se descriu principiile de bază și formele constructive cel mai frecvent utilizate, în special caracteristicile dinamice și influența acestora asupra comportării dinamice a sistemelor rotor-lagăre.

6.1 Lagăre hidrodinamice

Lagărele cu film de fluid au o peliculă subțire de lubrifianț între două suprafețe în mișcare relativă. Lubrifianțul are mai multe funcții : a) susține rotorul; b) reduce frecarea în reazem; c) produce rigiditate radială precum și amortizare radială prin strivirea și expulzarea fluidului; d) răcește lagărul și e) atenuează vibrațiile transmise de la rotor.

Lagărele cu film de fluid pot fi clasificate în mai multe tipuri principale în funcție de: a) principiu: hidrodinamice (autoportante), hidrostatice (cu presurizare externă) sau hibride (combinație a celor două); b) fluid: cu lichid sau cu gaz; c) regimul curgerii: laminar sau turbulent; d) geometrie: circulare cu cuzinet complet, cu două sau patru canale axiale, eliptice (lămâie), cu trei lobi, cu buzunar de presiune, cu treaptă Rayleigh, cu segmenti oscilanți, cu inel flotant, altele; și e) direcția relativă a sarcinii: radiale sau axiale.

În continuare se vor considera doar lagăre radiale hidrodinamice, lubrificate cu ulei, în regim laminar și incompresibil. În acest caz, capacitatea portantă provine din presiunea hidrodinamică creată în filmul de lubrifianț de rotirea fusului. Funcționarea lor se bazează pe formarea unei pene de ulei care ridică fusul. Configurațiile care produc mai multe pene de fluid conferă o stabilitate mai mare. Lagărele cu segmenti oscilanți sunt intrinsec stabile. Cele cu treaptă Rayleigh au o capacitate portantă sporită.

6.2. Caracteristici statice ale lagărelor hidrodinamice

Se consideră un lagăr orizontal cu un fus care se rotește cu viteza unghiulară constantă Ω . Se presupune că fusul este încărcat vertical în jos de o forță exterioară constantă W (fig. 6.1).

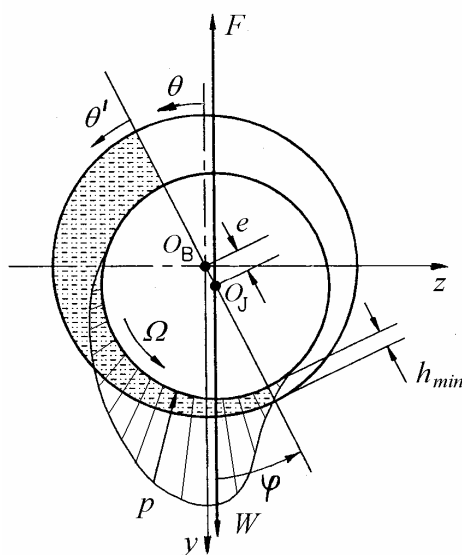


Fig. 6.1

Centrul fusului O_J este deplasat față de centrul lagărului O_B . Între fus și suprafața cuzinetului se formează un interstițiu convergent. Datorită adeziunii și vâscozității, lubrifianțul este antrenat în spațiul sub formă de pană, dând naștere unei presiuni hidrodinamice p în filmul de fluid.

Capacitatea portantă a lagărului este dată de forțele de presiune, care compensează forțele de frecare, produse în lichidul vâscos de mișcarea relativă a fusului față de cuzinet. În restul spațiului divergent dintre fus și cuzinet, curgerea lubrifianțului produce cavitație prin aerare (emisie de aer sau gaz) și filmul de fluid este rupt.

Presiunea p în filmul sub formă de pană are o distribuție asimetrică față de linia centrelor $\overline{O_B O_J}$. Rezultanta F a presiunii p este echilibrată de sarcina exterioară statică W . Poziția de echilibru a centrului fusului depinde de sarcina W și de viteza unghiulară de rotație Ω .

6.2.1 Geometria unui lagăr circular cu cuzinet complet

În figura 6.2 se arată secțiunea transversală a unui lagăr radial cu cuzinet complet [6.1]. Dimensiunile principale sunt: $D_B = 2R_B$ – diametrul interior al cuzinetului, $D = 2R$ – diametrul exterior al fusului, L – lungimea cuzinetului, $C = R_B - R$ – jocul radial, $e = \overline{O_B O_J}$ – excentricitatea, φ – unghiul de atitudine (unghiul de poziție al liniei centrelor) și h – grosimea locală a interstițiului.

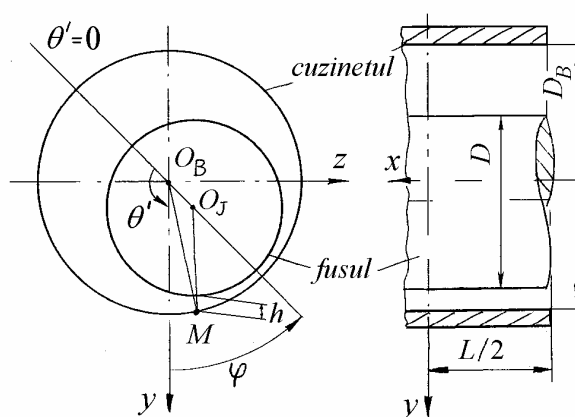


Fig. 6.2

Se utilizează următorii parametri geometrici adimensionali: L/D – raportul lungime/diametru; C/R – jocul relativ; $\varepsilon = e/C$ – excentricitatea relativă; și $\bar{h} = h/C$ – grosimea relativă a interstițiului.

Se presupune că fusul se rotește în sens antiorar cu viteza unghiulară constantă $\Omega = 2\pi N$ (rad/s), unde N este turația fusului în rot/s.

În triunghiul $O_B O_J M$, $\overline{O_B M} = R + C$, $\overline{O_J M} = R + h$, deci

$$(R + h)^2 = e^2 + (R + C)^2 + 2e(R + C) \cos \theta .$$

Ridicând la pătrat și neglijând termenii de ordin superior în e , h/R , și C/R , grosimea interstițiului poate fi aproximată prin

$$h \cong C(1 + \varepsilon \cos \theta), \quad (6.1)$$

care descrie forma filmului de lubrifianț cu o precizie de 1%.

Grosimea minimă a interstițiului este

$$h_{min} = C(1 - \varepsilon). \quad (6.2)$$

6.2.2 Poziția de echilibru a centrului fusului în lagăr

Capacitatea portantă a unui lagăr este caracterizată printr-un parametru adimensional numit *numărul Sommerfeld*.

Presiunea medie pe proiecția suprafeței fusului este

$$p' = \frac{W}{DL}$$

sau, în formă adimensională,

$$p_m = \frac{p'}{\mu N} \left(\frac{C}{R} \right)^2 = \frac{W}{\mu NDL} \left(\frac{C}{R} \right)^2,$$

unde W este sarcina radială (capacitatea de încărcare), N, și μ este vâscozitatea dinamică a lubrifianțului, Pa · s.

Numărul Sommerfeld este definit de obicei ca inversul presiunii medii

$$S = \frac{1}{p_m} = \frac{\mu NDL}{W} \left(\frac{R}{C} \right)^2. \quad (6.3)$$

O valoare mică a lui S indică un lagăr puternic încărcat, cu o turație mică. În unele publicații numărul Sommerfeld este definit prin inversul lui S .

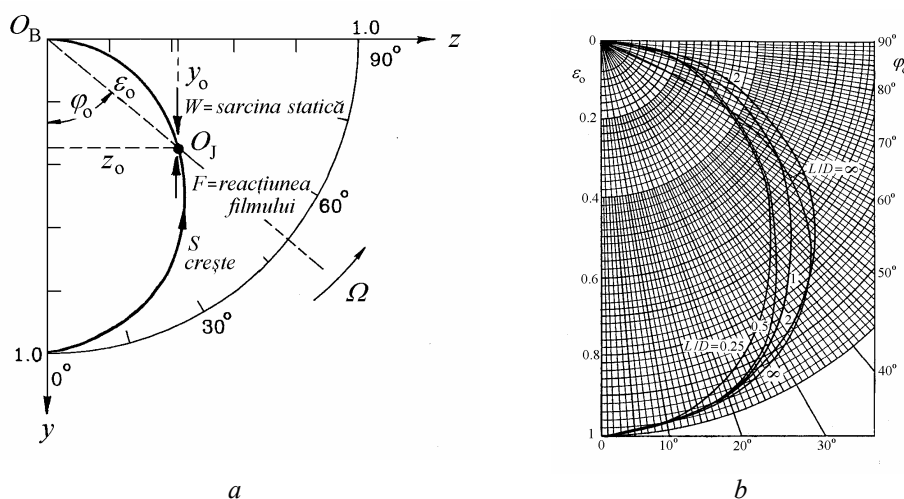


Fig. 6.3 [6.2]

Locul geometric al poziției de echilibru static al centrului fusului nu este o linie dreaptă, ci o curbă apropiată de un semicerc (fig. 6.3, a). În fig. 6.3, b se arată curbele de echilibru static pentru cinci valori ale raportului L/D .

Locul geometric este definit de excentricitatea relativă ε_0 și de unghiul de atitudine φ_0 . Ambii parametri sunt funcții de sarcină și turație prin numărul Sommerfeld S .

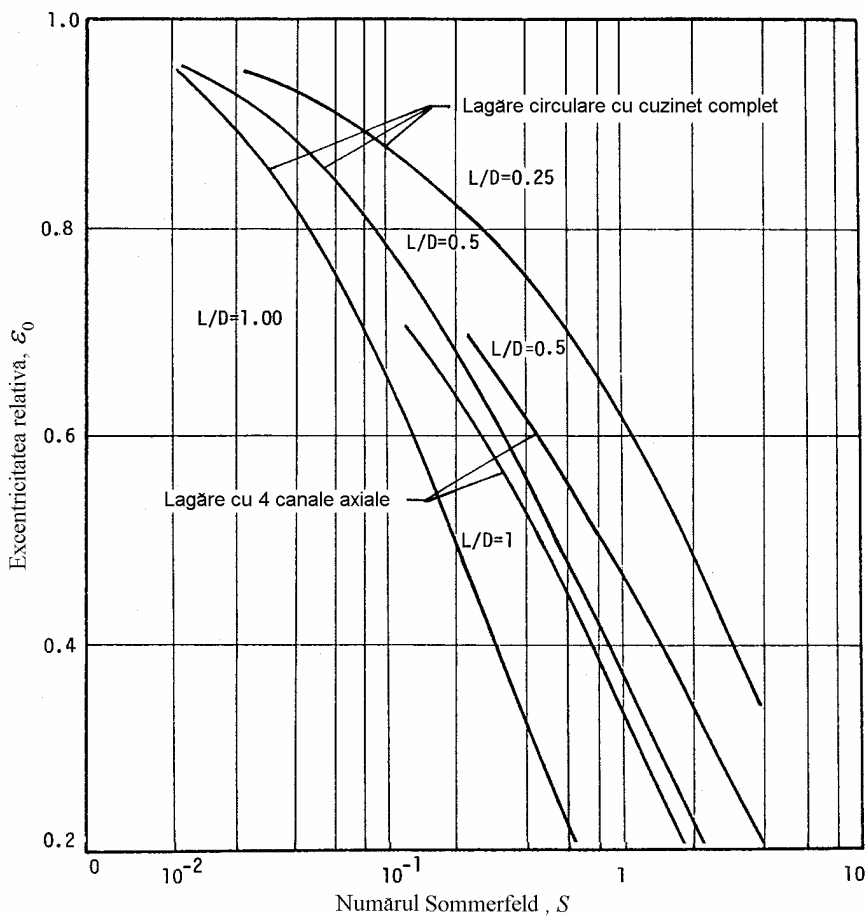


Fig. 6.4 [6.3]

Pentru $W = \text{const.}$ și Ω crescătoare, centrul fusului se mișcă în sus pe curba pozițiilor de echilibru static. Pornind din partea de jos a lagărului ($\varepsilon_0 = 1$), la pornirea rotorului, și deplasându-se în sus cu creșterea turației, fusul ajunge în poziția concentrică ($\varepsilon_0 = 0$) la limită, când turația crește nelimitat.

Pentru $\Omega = \text{const.}$ și W crescătoare, centrul fusului se mișcă în jos pe curba pozițiilor de echilibru static. Pornind din poziția concentrică ($\varepsilon_0 = 0$), unde încărcarea este zero, centrul fusului se deplasează în jos cu creșterea sarcinii, apropiindu-se de partea de jos a lagărului ($\varepsilon_0 = 1$) când sarcina tinde spre infinit.

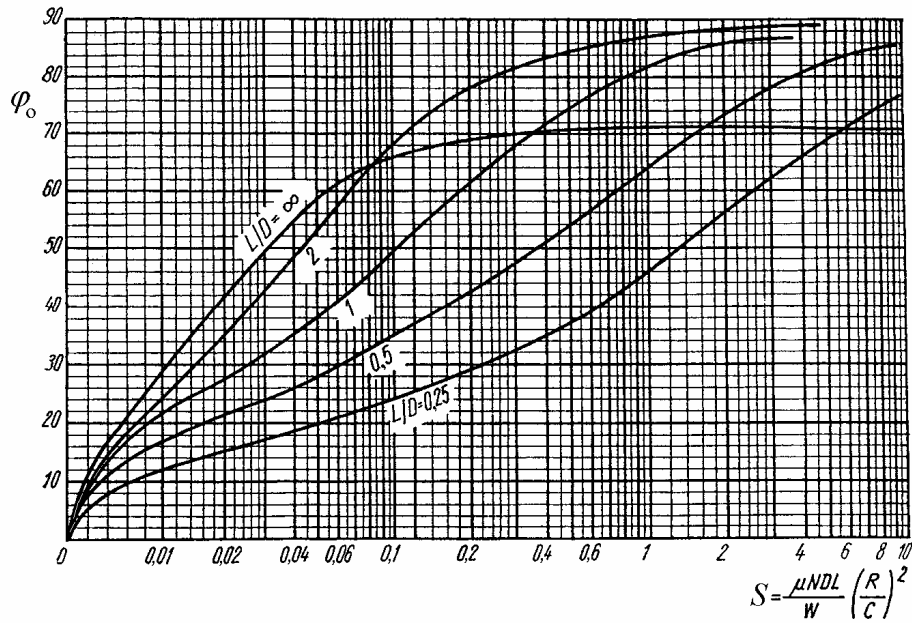


Fig. 6.5 [6.2]

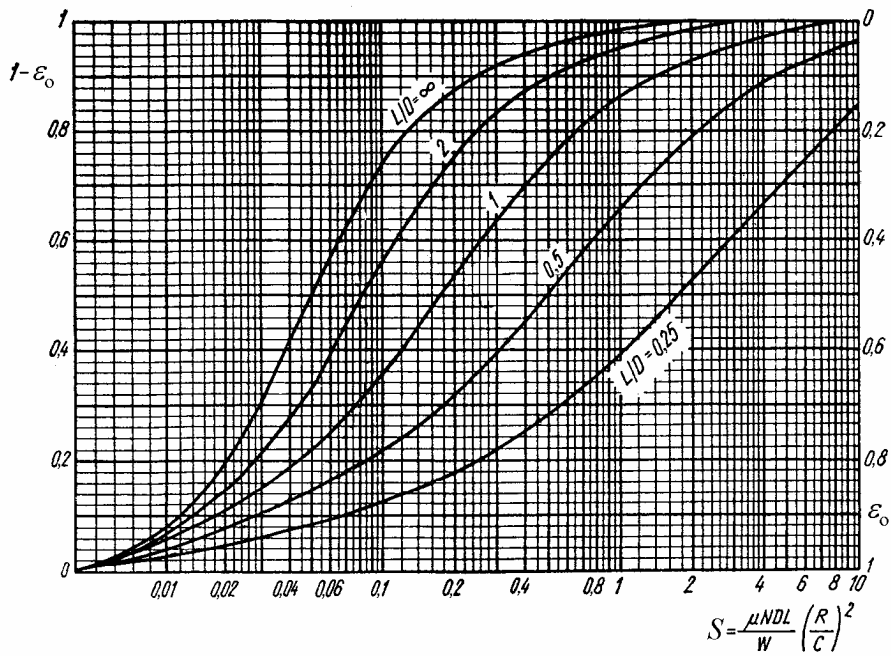


Fig. 6.6 [6.2]

În fig. 6.4 se prezintă variația excentricității relative ε_0 a unui lagăr circular cu cuzinet complet în funcție de numărul Sommerfeld, pentru trei valori L/D . În fig. 6.5 se arată variația unghiului de atitudine φ_0 în funcție de S , iar în fig. 6.6 s-a reprezentat variația parametrului $1 - \varepsilon_0$ în funcție de S .

Pentru valori date ale geometriei lagărului, vâscozității lubrifiantului și încărcării statice, poziția de echilibru a fusului, definită de $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S)$ și $\varphi_0 = \varphi_0(S)$, depinde numai de turație. De observat că forța și deplasarea nu sunt în aceeași direcție. Deși în cazul arborilor orizontali sarcina W este verticală în jos, centrul fusului se deplasează într-o poziție de echilibru oblică. Lagărul radial se comportă ca un element asimetric, cu rigidități directe și transversale. Lagărul este anizotrop, având rigidități diferite în direcții radiale diferite.

6.3 Coeficienții dinamici ai lagărelor hidrodinamice

Se consideră că fusul se mișcă în lagăr pe o orbită în jurul poziției de echilibru static (fig. 6.7). Reacțiunea rezultantă a filmului de lubrifiant are amplitudine și direcție variabilă (nu mai este verticală). Componentele acesteia, F_y și F_z , sunt funcții neliniare de componentele deplasării centrului fusului y și z , și de componentele vitezei acestuia \dot{y} și \dot{z} :

$$F_y = F_y(y, z, \dot{y}, \dot{z}), \quad F_z = F_z(y, z, \dot{y}, \dot{z}).$$

Pentru mișcări de mică amplitudine, reacțiunea lagărului poate fi exprimată prin termenii de ordinul întâi ai dezvoltării în serie Taylor a componentelor acesteia în jurul poziției de echilibru static (direcțiile componentelor forței în fig. 6.7 sunt alese pentru a evita semnul “minus” în expresiile de mai jos):

$$\begin{aligned} F_y &= F_{y_0} + k_{yy}y + k_{yz}z + c_{yy}\dot{y} + c_{yz}\dot{z}, \\ F_z &= F_{z_0} + k_{zy}y + k_{zz}z + c_{zy}\dot{y} + c_{zz}\dot{z}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Componentele statice ale reacțiunii sunt $F_{y_0} = W$ și $F_{z_0} = 0$. Cei opt coeficienți ai componentelor forței liniarizate se calculează ca derivate direcționale (gradienti) în poziția de echilibru static ($y = z = \dot{y} = \dot{z} = 0$):

$$\begin{aligned} k_{yy} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_0, \quad k_{yz} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} \right)_0, \quad k_{zy} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \right)_0, \quad k_{zz} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right)_0, \\ c_{yy} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_0, \quad c_{yz} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{z}} \right)_0, \quad c_{zy} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial \dot{y}} \right)_0, \quad c_{zz} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial \dot{z}} \right)_0. \end{aligned}$$

Aceștia se obțin din soluția ecuației lubrificației.

Prin liniarizarea componentelor reacțiunii unui lagăr, se decuplează rotorul de lagăr. În caz contrar, ecuațiile rotorului trebuie integrate simultan cu ecuația lubrificației.

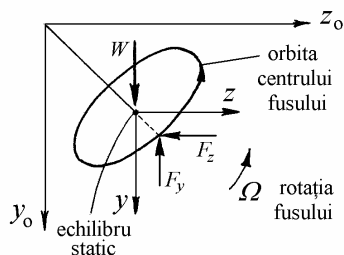


Fig. 6.7

În formă matricială, relațiile (6.4) se pot scrie

$$\begin{Bmatrix} F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{Bmatrix}.$$

Variațiile componentelor reacțiunii filmului datorită unor deplasări mici în jurul poziției de echilibru static se exprimă în funcție de coeficienții de rigiditate și de amortizare sub forma

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = [k^b] \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + [c^b] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}. \quad (6.5)$$

Cei opt coeficienți (liniarizați) de rigiditate și de amortizare depind de condițiile de lucru în regim staționar, deci de turație.

Se definesc patru coeficienți de rigiditate adimensionali

$$[K^b] = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} = \frac{C}{W} [k^b], \quad (6.6, a)$$

și patru coeficienți de amortizare adimensionali

$$[C^b] = \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} = \frac{C\Omega}{W} [c^b]. \quad (6.6, b)$$

Pentru o anumită geometrie și vâscozitate a lubrifiantului, cei opt coeficienți sunt funcții de numărul Sommerfeld \$S\$ sau de excentricitatea relativă. Ei se numesc cei *opt coeficienți dinamici ai lagărului*. Valori ale acestor coeficienți sunt date în monografia editată de Someya [6.1].

În cazul arborilor flexibili sau a fusurilor rigide înclinate, axa fusului poate să nu fie paralelă cu axa cuzinetului. Distribuția presiunii în lungul fusului produce reacțiuni momente. Dezvoltarea acestora în serie Taylor definește încă un set de patru coeficienți de rigiditate unghiulari și patru coeficienți de amortizare unghiulari corespunzând celor două rotații posibile ale axei fusului față de cea a cuzinetului. În general, în comparație cu coeficienții de translație, aceștia sunt mai mici cu un factor $(2L/\ell)$, unde ℓ este deschiderea adiacentă lagărului și L este lungimea cuzinetului. Influența coeficienților unghiulari este importantă doar la lagăre relativ lungi sau la moduri superioare de precesie ale rotorului.

Matricea de rigiditate a lagărelor radiale este în general nesimetrică. Aceasta este cauza instabilității rotoarelor peste o turație de lucru limită, denumită *turația de apariție a instabilității* (“onset speed of instability”). Mișcarea instabilă a fusurilor în lagăre se numește *precesia datorită uleiului* (“oil whirl”) fiind o mișcare subsincronă cu amplitudini mari la turația critică a rotorului. Rotoarele verticale fără sarcini laterale pot avea o mișcare într-un ciclu limită a cărei frecvență este aproximativ jumătate din viteza unghiulară corespunzătoare rotației și care se numește tot precesie datorită uleiului. La turații peste dublul frecvenței proprii a rotorului, mișcarea subsincronă a acestuia încetează să urmărească turația de lucru și are loc la frecvența proprie, mișcare denumită *oil whip*. Aceste mișcări instabile sunt prezentate în detaliu în Cap. 7.

Cavitația, compresibilitatea și turbulența sunt fenomene care complică modelarea și analiza lagărelor radiale hidrodinamice. Considerarea acestora depășește cadrul acestui curs.

6.4 Ecuația Reynolds și condițiile la limită

În continuare se prezintă câteva aspecte ale interacțiunii rotor-lagăre, pentru a înțelege metodologia de calcul și ipotezele simplificatoare adoptate în calculul caracteristicilor dinamice ale lagărelor.

La început, se stabilește ecuația Reynolds pentru curgere laminară. Aceasta este ecuația câmpului de presiuni într-un lagăr cu curgere izovâscoasă. Apoi, prin integrarea acestui câmp de presiuni, se determină forțele neliniare care acționează asupra fusului. Se descriu pe scurt condițiile la limită pentru distribuția câmpului de presiuni. În final, forța de reacțiune dinamică neliniară a filmului de fluid este dezvoltată în serie Taylor iar termenii de ordinul doi sau superiori sunt neglijați. Coeficienții de rigiditate și de amortizare (6.5) se determină din termenii de ordinul întâi ai acestei serii [6.4].

De remarcat că u , v , w sunt componente ale vitezei fluidului în direcțiile x , y , z , și nu deplasări.

6.4.1 Ipoteze generale

La deducerea ecuației Reynolds din ecuațiile generale Navier-Stokes ale fluidelor vâscoase, se utilizează următoarele 13 ipoteze:

1. Lubrifiantul este izotrop.

2. Lubrifiantul este newtonian. Frecarea este descrisă de legea vâscozității a lui Newton

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (6.7)$$

unde τ este tensiunea tangențială în filmul fluid, N/m^2 , $\dot{\gamma}$ este gradientul în timp al lunecărilor specifice de forfecare, $1/\text{sec}$, și μ este vâscozitatea dinamică (absolută) a lubrifiantului, $\text{Pa} \cdot \text{s}$.

Uneori μ este măsurată în centipoise ($1\text{cP} = 1.0054 \cdot 10^{-3} \text{Ns/m}^2$).

3. Vâscozitatea dinamică μ nu variază pe grosimea stratului de lubrifiant.

4. Filmul de fluid este foarte subțire în comparație cu lungimea și lățimea:

$$h_{min} \ll R, \quad (C/R)^2 \ll 1.$$

5. Curgerea este laminară și se neglijează forțele de inerție:

$$(C/R)Re \ll 1, \quad (C/R \cong 0,001, Re < 2300)$$

unde numărul Reynolds

$$Re = \frac{\rho w_t C}{\mu} \quad \text{sau} \quad Re = \frac{\rho w_t h_{min}}{\mu} \quad (6.8)$$

este o măsură a raportului între forțele de inerție și forțele de frecare vâscoasă care acționează asupra unui volum de lubrifiant, ρ este densitatea lubrifiantului, kg/m^3 , $w_t = R\Omega$ este viteza la suprafața fusului, m/s , iar C este jocul radial, m .

6. Între lubrifiant și suprafețele fusului și cuzinetului nu există lunecări.

7. Se neglijează curbura suprafețelor fusului și cuzinetului.

8. Se neglijează deformațiile fusului și cuzinetului.

9. Variația interstițiului în direcție circumferențială este mică.

10. Se neglijează înclinarea relativă a axelor fusului și cuzinetului (deci momentul reacțiune).

11. Componenta radială a vitezei fluidului este mică în comparație cu componentele circumferențială și axială.

12. Presiunea este constantă pe grosimea filmului de lubrifiant.

13. Gradienții de viteză de ordinul întâi și doi în direcție circumferențială și axială sunt neglijabili în comparație cu cei pe direcția grosimii.

Ipoteze suplimentare:

14. Lubrifiantul este incompresibil ($\rho = \text{const.}$).

15. Curgerea este izotermă și izovâscoasă.

Pentru determinarea aproximativă a temperaturii lagărului, se utilizează o versiune simplificată a ecuației energiei. Deoarece componenta predominantă a curgerii este în direcție circumferențială, ipotezele uzuale includ: a) neglijarea contribuției minore a gradientilor de presiune la curgere și frecare, și b) neglijarea conducerii termice în lungul filmului sau spre suprafețe.

6.4.2 Ecuația Reynolds

Ecuația Reynolds este o versiune mult simplificată a ecuațiilor Navier-Stokes și a ecuației de continuitate.

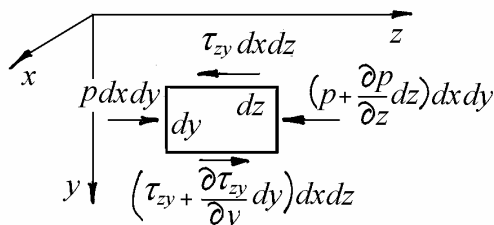


Fig. 6.8

Neglijând forțele care provin din greutatea proprie și forțele de inerție (atât temporale cât și convective) (v. ipotezele 4 și 5), ecuațiile de echilibru dinamic între forțele de presiune și forțele de frecare care acționează asupra unui volum elementar de fluid (fig. 6.8) se scriu

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \quad \text{unde} \quad \tau_{zy} = \mu \frac{\partial w}{\partial y},$$

astfel că

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

Conform ipotezei a 3a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (6.9)$$

unde gradientii de presiune $\partial p/\partial x$ și $\partial p/\partial z$ nu sunt funcții de y .

Pentru condiții la limită fără alunecare relativă

$$y = 0, \quad w = 0, \quad v = 0, \quad u = 0, \quad (\text{lagăr fix})$$

$$y = h, \quad w = w_h, \quad v = \partial h/\partial t, \quad u = 0, \quad (\text{ipoteza 9})$$

câmpul de viteze este

$$w = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(h-y) + \frac{y}{h} w_h, \quad u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(h-y).$$

Debitul volumic pe unitatea de lungime transversală a lagărului, în direcția mișcării, este

$$q_z = \int_0^h w \, dy = w_h \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (6.10)$$

unde primul termen din membrul drept este curgerea produsă de forfecare (curgerea Couette) iar al doilea termen este curgerea produsă de gradientul de presiune (curgerea Poiseuille).

Debitul volumic pe unitatea de lungime transversală a lagărului, în direcție axială este

$$q_x = \int_0^h u \, dy = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6.11)$$

Pentru un volum infinitesimal de fluid, de înălțime h și suprafață $dx \, dz$, ecuația de continuitate (bilanțul de debite) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho q_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho q_x) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = 0. \quad (6.12)$$

Înlocuind q_z și q_x din (6.10) și (6.11) rezultă ecuația presiunilor

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (w_h \rho h) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h).$$

În cazul unui fluid incompresibil ($\rho = \text{const.}$) ecuația Reynolds pentru curgere laminară în coordonate carteziane (cu efecte dependente de timp) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{w_h}{2} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (6.13)$$

Înlocuind $z = R\theta$ și $w_h = \Omega R$, ecuația Reynolds în coordonate circumferențiale devine

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (6.14)$$

unde $h = C(1 + \varepsilon \cos\theta)$ iar θ este coordonata unghiulară definită în fig. 6.1.

6.4.3 Condiții la limită pentru câmpul de presiuni în filmul fluid

Condițiile la limită pentru presiune utilizate în mod obișnuit la lagăre circulare cu cuzinet complet, în condiții de lucru staționare, sunt arătate în fig. 6.9.

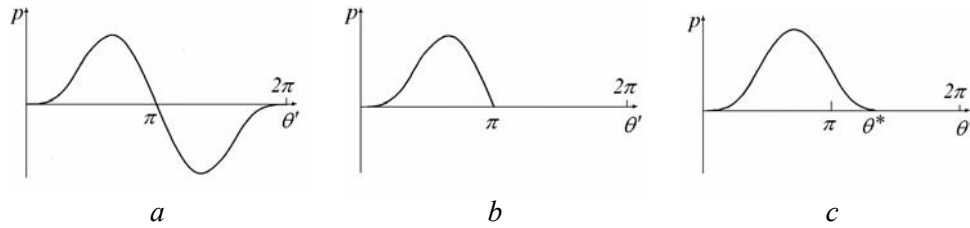


Fig. 6.9

a) Condiția la limită Sommerfeld (film 2π) este antisimetrică față de $\theta' = \pi$ (fig. 6.9, a):

$$p(\theta', x) > 0 \text{ pentru } 0 < \theta' < \pi,$$

$$p(\theta', x) = -p(2\pi - \theta', x).$$

Se consideră că la unghiuri $\pi < \theta' < 2\pi$ se dezvoltă o presiune negativă de aceeași mărime cu cea pozitivă, deși, datorită ruperii filmului, în această regiune presiunea este egală cu cea atmosferică. În zona divergentă nu există presiuni negative mari. Distribuția conduce la o capacitate portantă nulă ceea ce este fizic incorect. Această condiție este folosită doar la lagăre cu presiune hidrostatică.

b) Condiția la limită Gumbel (film π) înlocuiește presiunea negativă din condiția la limită Sommerfeld cu presiunea atmosferică (fig. 6.9, b), considerând că presiunea se dezvoltă doar în zona convergentă iar zona divergentă este cavitată:

$$p(\theta', x) > 0 \text{ pentru } 0 < \theta' < \pi,$$

$$p(\theta', x) = 0 \quad \text{pentru} \quad \pi \leq \theta' \leq 2\pi.$$

Deși fizic inacceptabilă, deoarece continuitatea curgerii nu este realizată la $\theta' = \pi$, este utilizată frecvent datorită simplității. Erorile introduse sunt mici.

c) Condiția la limită Reynolds (fig. 6.9, c) impune un gradient de presiune zero în punctul în care presiunea din pelicula de lubrifianț devine egală cu presiunea ambiantă (pentru continuitatea debitului în punctul de rupere a filmului):

$$\begin{aligned} p(\theta', x) &> 0 \quad \text{pentru} \quad 0 < \theta' < \theta^*, \\ p(\theta', x) &= 0 \quad \text{pentru} \quad \theta^* \leq \theta' \leq 2\pi, \\ \frac{\partial p}{\partial \theta'} &= 0 \quad \text{la} \quad \theta' = \theta^*. \end{aligned}$$

6.5 Soluții analitice ale ecuației Reynolds

Rezolvarea ecuației Reynolds se poate face prin metoda diferențelor finite, metoda elementelor finite și metoda seriilor infinite. În continuare se prezintă câteva soluții analitice.

6.5.1 Soluția pentru lagăre infinit scurte (Ocvirk)

Într-un lagăr circular scurt, componenta Poiseuille a curgerii (componenta x) în direcție axială este mult mai mare decât componenta circumferențială (componenta θ). Dacă se neglijează contribuția gradientului de presiune la viteza circumferențială w , se poate neglija primul termen în ecuația Reynolds (6.14):

$$\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\Omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (6.15)$$

Pentru $\mu = \text{const.}$ ecuația (6.15) se integrează ușor, rezultând

$$p = -3\mu \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right) \frac{1}{h^3} \left(\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (6.16)$$

astfel că, în lungul axei x (fig. 6.10) presiunea este

$$p(\theta, L/2) = p(\theta, -L/2) = 0.$$

Forțele produse de filmul de lubrifianț se calculează integrând presiunea pe zona activă a filmului. Este convenabil să se calculeze componentele rezultantei

presiunilor pe direcția liniei centrelor și pe o normală la aceasta, F_ε și F_φ (fig. 6.11).

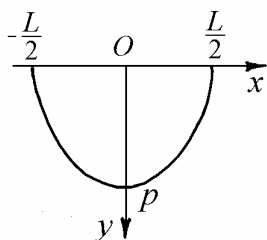


Fig. 6.10

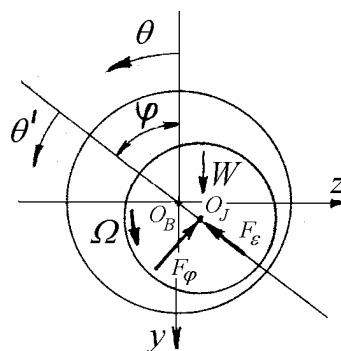


Fig. 6.11

Cele două componente au expresiile :

$$F_\varepsilon = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} p \cos \theta' R d\theta' dx, \quad F_\varphi = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} p \sin \theta' R d\theta' dx, \quad (6.17)$$

în care unghiul $\theta' = \theta - \varphi$ este măsurat față de linia centrelor $\overline{O_B O_J}$.

Înlocuind grosimea relativă a peliculei de lubrifiant

$$\bar{h} = \frac{h}{C} = 1 + \varepsilon \cos \theta'$$

în expresia presiunilor (6.16) rezultă

$$p = 3\mu\Omega \left(\frac{R}{C}\right)^2 \left[\left(\frac{L}{D}\right)^2 - \left(\frac{x}{R}\right)^2 \right] \frac{1}{\bar{h}^3} [\varepsilon(1 - 2\dot{\varphi}) \sin \theta' - 2\dot{\varepsilon} \cos \theta'] \quad (6.18)$$

unde

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\Omega} \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{\Omega} \frac{d\varphi}{dt},$$

sunt derivatele lui ε și φ în raport cu timpul adimensional Ωt .

Presiunea este pozitivă atunci când

$$\varepsilon(1 - 2\dot{\varphi}) \sin \theta' - 2\dot{\varepsilon} \cos \theta' \geq 0.$$

Filmul începe la $\theta' = \theta'_1$ și se termină la $\theta' = \theta'_2$ unde $p = 0$:

$$\theta'_1 = \arctg \frac{2\dot{\varepsilon}}{\varepsilon(1-2\dot{\varphi})}, \quad \theta'_2 = \theta'_1 + \pi.$$

La $\theta' = \theta'_1$, panta distribuției presiunilor trebuie să fie pozitivă:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta'_1} > 0,$$

$$\varepsilon(1-2\dot{\varphi}) \cos \theta'_1 + 2\dot{\varepsilon} \sin \theta'_1 = \frac{\varepsilon(1-2\dot{\varphi})}{\cos \theta'_1} > 0,$$

astfel încât

$$\cos \theta'_1 = \frac{\varepsilon(1-2\dot{\varphi})}{\sqrt{\varepsilon^2(1-2\dot{\varphi})^2 + (2\dot{\varepsilon})^2}}, \quad \sin \theta'_1 = \frac{2\dot{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon^2(1-2\dot{\varphi})^2 + (2\dot{\varepsilon})^2}},$$

care definesc cuadrantul în care se află unghiul θ'_1 .

Înlocuind presiunea (6.18) în (6.17), expresiile componentelor rezultantei presiunilor devin

$$F_\varepsilon = -W2\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 S \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \frac{1}{h^3} [\varepsilon(1-2\dot{\varphi}) \sin \theta' - 2\dot{\varepsilon} \cos \theta'] \cos \theta' d\theta', \quad (6.19, a)$$

$$F_\varphi = W2\pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 S \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \frac{1}{h^3} [\varepsilon(1-2\dot{\varphi}) \sin \theta' - 2\dot{\varepsilon} \cos \theta'] \sin \theta' d\theta'. \quad (6.19, b)$$

Pentru încărcare statică $\dot{\varepsilon} = \dot{\varphi} = 0$, poziția de echilibru a centrului fusului este dată de coordonatele ε_0 și φ_0 , $\theta'_1 = 0$ și $\theta'_2 = \pi$. Utilizând această poziție, se poate defini un sistem de axe de coordonate (fig. 6.12) rotit cu $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ față de axele $\varepsilon - \varphi$, având axa r în direcție radială (direcția ε_0) și axa t în direcție tangențială (direcția φ_0). Componentele rezultantei presiunilor sunt date de

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \varphi_0) & \sin(\varphi - \varphi_0) \\ -\sin(\varphi - \varphi_0) & \cos(\varphi - \varphi_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_\varepsilon \\ F_\varphi \end{Bmatrix}. \quad (6.20)$$

Pentru mișcări de mică amplitudine, $\Delta e = C\Delta\varepsilon$ în direcția r și $e_0\Delta\varphi = C\varepsilon_0\Delta\varphi$ în direcția t . Utilizând termenii de ordinul întâi ai dezvoltării în serie Taylor în jurul poziției de echilibru static, se obține

$$F_r = F_{r_0} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial \varepsilon} \right)_0 \Delta \varepsilon + \left(\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \varphi} \right)_0 \varepsilon_0 \Delta \varphi + \left(\frac{\partial F_r}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_0 \Delta \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \dot{\varphi}} \right)_0 \varepsilon_0 \Delta \dot{\varphi}, \quad (6.21, a)$$

$$F_t = F_{t_0} + \left(\frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} \right)_0 \Delta \varepsilon + \left(\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \varphi} \right)_0 \varepsilon_0 \Delta \varphi + \left(\frac{\partial F_t}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_0 \Delta \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \dot{\varphi}} \right)_0 \varepsilon_0 \Delta \dot{\varphi}, \quad (6.21, b)$$

Pentru calculul derivatelor parțiale, expresiile (6.19) trebuie derivate în raport cu cele trei variabile ε , $\dot{\varepsilon}$ și $\dot{\varphi}$, utilizând regula lui Leibniz de derivare a integralelor.

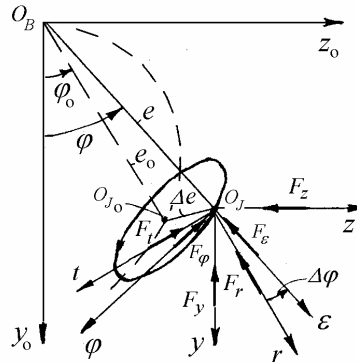


Fig. 6.12

Alegând $\theta'_1 = 0$ și $\theta'_2 = \pi$, corespunzător la $\dot{\varepsilon} = \dot{\varphi} = 0$ în poziția de echilibru static, expresiile (6.19) pot fi integrate și, pentru $\varepsilon = \varepsilon_0$ și $\varphi = \varphi_0$, se obține

$$F_{r_0} = (F_\varepsilon)_0 = \pi W \left(\frac{L}{D} \right)^2 S \frac{4\varepsilon_0^2}{(1-\varepsilon_0^2)^2}, \quad (6.22, a)$$

$$F_{t_0} = (F_\varphi)_0 = \pi W \left(\frac{L}{D} \right)^2 S \frac{\pi \varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}}. \quad (6.22, b)$$

Componentele rezultantei presiunilor în lungul axelor y și z sunt

$$\begin{Bmatrix} F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & -\cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix}. \quad (6.23)$$

În poziția de echilibru static, $F_z = 0$ și $F_y = W$,

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{t_0}}{F_{r_0}} = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{4\varepsilon_0},$$

$$\frac{F_{r_0}}{W} \cos \varphi_0 + \frac{F_{t_0}}{W} \sin \varphi_0 = 1,$$

ceea ce implică

$$\frac{F_{r_0}}{W} = \cos \varphi_0 = \sigma \frac{4\varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0^2)^2}, \quad (6.24, a)$$

$$\frac{F_{t_0}}{W} = \sin \varphi_0 = \sigma \frac{\pi \varepsilon_0}{(1 - \varepsilon_0^2)^{3/2}}. \quad (6.24, b)$$

Eliminând unghiul φ_0 între relațiile (6.24), se obține numărul lui Sommerfeld modificat

$$\sigma = \pi \left(\frac{L}{D} \right)^2 S = \frac{(1 - \varepsilon_0^2)^2}{\varepsilon_0 \sqrt{16 \varepsilon_0^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon_0^2)}}, \quad (6.25)$$

expresie care definește relația între S și ε_0 .

Componentele rezultantei presiunilor (6.21) se mai pot scrie sub forma

$$\begin{Bmatrix} F_r/W \\ -F_t/W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{r_0}/W \\ -F_{t_0}/W \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rt} \\ K_{tr} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon \\ \varepsilon_0 \Delta \varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rt} \\ C_{tr} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\varepsilon} \\ \varepsilon_0 \Delta \dot{\varphi} \end{Bmatrix}. \quad (6.26)$$

Coefficienții adimensionali de rigiditate și de amortizare din expresiile (6.26) se exprimă în funcție de coeficienții reali prin relații similare cu (6.6). Ei se obțin prin derivarea expresiilor (6.20) și prin înlocuire din expresiile (6.24):

$$K_{rr} = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \varepsilon} \right)_0 = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right)_0 = \sigma \frac{8\varepsilon_0 (1 + \varepsilon_0^2)}{(1 - \varepsilon_0^2)^3} = \frac{2(1 + \varepsilon_0^2)}{\varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0^2)} \frac{F_{r_0}}{W},$$

$$K_{rt} = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \varphi} \right)_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{F_{t_0}}{W},$$

$$K_{tr} = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} \right)_0 = -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varepsilon} \right)_0 = -\sigma \frac{\pi (1 + 2\varepsilon_0^2)}{(1 - \varepsilon_0^2)^{5/2}} = -\frac{1 + 2\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0^2)} \frac{F_{t_0}}{W},$$

$$\begin{aligned}
K_{tt} &= -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \varphi} \right)_0 = \frac{1}{W} \left(\frac{F_\varepsilon}{\varepsilon} \right)_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{F_{r_0}}{W}, \\
C_{rr} &= \frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_0 = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_0 = -2K_{tr}, \\
C_{rt} &= \frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \dot{\varphi}} \right)_0 = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\varepsilon \partial \dot{\varphi}} \right)_0 = -\sigma \frac{8\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} = -\frac{2}{\varepsilon_0} \frac{F_{r_0}}{W} = -2K_{tt}, \\
C_{tr} &= -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_t}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_0 = -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_0 = -\sigma \frac{8\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} = -\frac{2}{\varepsilon_0} \frac{F_{r_0}}{W} = C_{rt}, \\
C_{tt} &= -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \dot{\varphi}} \right)_0 = -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial F_\varphi}{\varepsilon \partial \dot{\varphi}} \right)_0 = \sigma \frac{2\pi}{(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} = \frac{2}{\varepsilon_0} \frac{F_{t_0}}{W} = 2K_{rt}.
\end{aligned}$$

Deoarece sistemul de coordonate $r-t$ se rotește cu modificarea poziției de echilibru, și deci cu turația rotorului, este convenabilă transformarea într-un sistem de coordonate fixe $y-z$ pe baza relațiilor

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon \\ \varepsilon_0 \Delta\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix}. \quad (6.27)$$

Transformarea forțelor fiind dată de (6.23), coeficienții adimensionali în coordonate $y-z$ se obțin prin transformarea

$$\begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rt} \\ K_{tr} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Expresiile analitice ale coeficienților dinamici în coordonate $y-z$ sunt:

$$K_{yy} = \frac{C k_{yy}}{W} = \frac{4Q(\varepsilon_0)}{1-\varepsilon_0^2} \left[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon_0^2 + (32 - 2\pi^2)\varepsilon_0^4 \right],$$

$$K_{yz} = \frac{C k_{yz}}{W} = \frac{\pi Q(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \sqrt{1-\varepsilon_0^2}} \left[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon_0^2 + (32 - 2\pi^2)\varepsilon_0^4 \right],$$

$$K_{zy} = \frac{C k_{zy}}{W} = -\frac{\pi Q(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \sqrt{1-\varepsilon_0^2}} \left[\pi^2 - 2\pi^2\varepsilon_0^2 - (16 - \pi^2)\varepsilon_0^4 \right],$$

$$K_{zz} = \frac{C k_{zz}}{W} = 4Q(\varepsilon_0) \left[2\pi^2 + (16 - \pi^2) \varepsilon_0^2 \right], \quad (6.28)$$

$$C_{yy} = \frac{C \Omega c_{yy}}{W} = \frac{2\pi Q(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}} \left[\pi^2 + (48 - 2\pi^2) \varepsilon_0^2 + \pi^2 \varepsilon_0^4 \right],$$

$$C_{yz} = \frac{C \Omega c_{yz}}{W} = 8Q(\varepsilon_0) \left[\pi^2 + (2\pi^2 - 16) \varepsilon_0^2 \right] = C_{zy},$$

$$C_{zz} = \frac{C \Omega c_{zz}}{W} = \frac{2\pi \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} Q(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \left[\pi^2 + (2\pi^2 - 16) \varepsilon_0^2 \right],$$

unde

$$Q(\varepsilon_0) = \left[16\varepsilon_0^2 + \pi^2(1 - \varepsilon_0^2) \right]^{-\frac{3}{2}}.$$

În fig. 6.13 se prezintă un set diferit de coeficienți adimensionali de rigiditate și de amortizare

$$\bar{K}_{ij} = \frac{K_{ij}}{2\sigma}, \quad \bar{C}_{ij} = \frac{C_{ij}}{2\sigma}, \quad i, j = y, z \quad (6.29)$$

în funcție de ε_0 , pentru lagăre scurte cu film π (Gümbel).

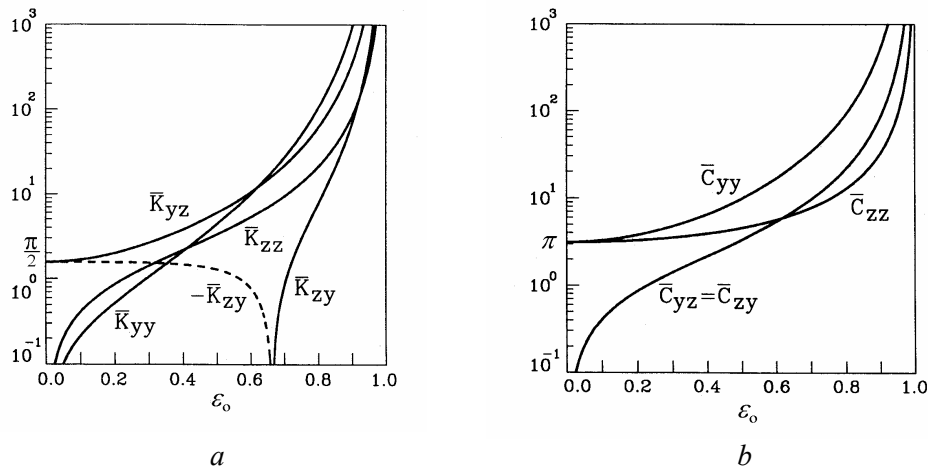


Fig. 6.13 [6.5]

Soluția pentru lagăre scurte se dovedește a fi o bună aproximație pentru lagăre circulare cu cuzinet complet, cu $L/D < 0,5$ și $\varepsilon < 0,7$. Cum aceste condiții sunt satisfăcute în multe aplicații practice, soluția lui Ocvirk este utilizată frecvent în analiza dinamică a sistemelor rotor-lagăre.

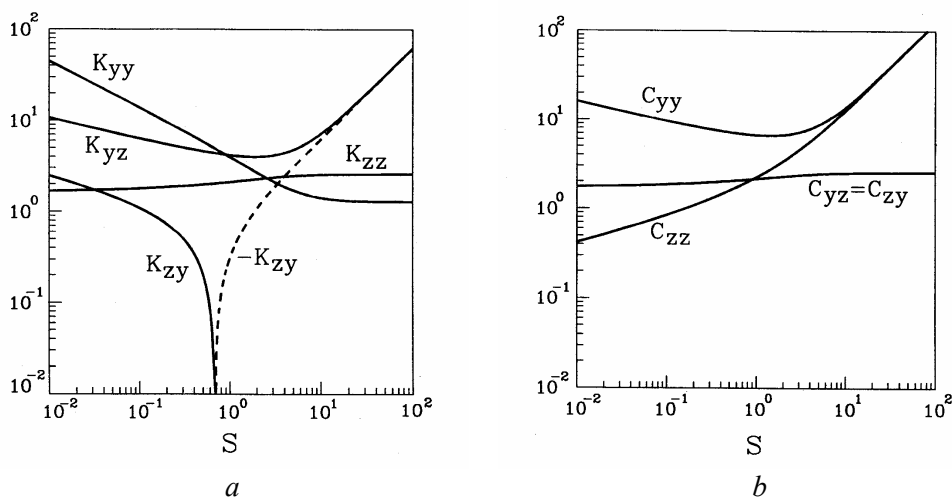


Fig. 6.14 [6.5]

Adesea, cei opt coeficienți dinamici dați de relațiile (6.28) se prezintă grafic în funcție de numărul Sommerfeld, S , pentru valori date ale raportului L/D . În fig. 6.14 se arată graficele pentru $L/D = 0,25$. Pentru aplicații specifice, este preferabilă reprezentarea grafică a coeficienților dimensionali de rigiditate și de amortizare k_{ij} , c_{ij} în funcție de viteza unghiulară de rotație Ω .

Exemplul 6.1

În fig. 6.15 se prezintă coeficienții dimensionali de rigiditate și de amortizare ai unui lagăr cu $L = 20$ mm, $D = 80$ mm, $C = 0,05$ mm, $\mu = 0,7$ Pa·s, și $W = 417,5$ N.

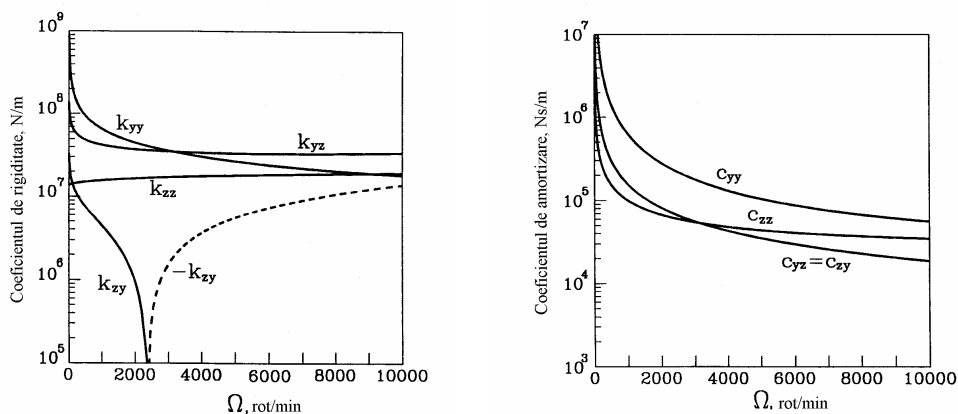


Fig. 6.15 [6.5]

Caracteristicile statice sunt date în Tabelul 6.1 [6.5].

Tabelul 6.1

Frecvența rotației, Hz	S	ε_0	φ_0
1	0,1085	0,9512	0,2750
5	0,5423	0,8805	0,4178
10	1,0846	0,8292	0,5019
20	2,1692	0,7593	0,6049
30	3,2538	0,7079	0,6758
40	4,3384	0,6661	0,7316
50	5,4230	0,6305	0,7781
60	6,5076	0,5992	0,8184
70	7,5923	0,5714	0,8540
80	8,6769	0,5462	0,8859
90	9,7615	0,5232	0,9150

Este instructiv de studiat comportarea asimptotică a coeficienților lagărelor foarte scurte atunci când excentricitatea tinde spre zero. Din expresia (6.25) se obține următoarea relație asimptotică între ε_0 și S

$$\varepsilon_0 S \cong \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{D}{L} \right)^2.$$

Când ε_0 tinde spre zero (sau S tinde spre infinit),

$$K_{zz} \cong 2K_{yy} \cong C_{yz} \cong C_{zy} \cong \frac{8}{\pi},$$

$$2K_{yz} \cong -2K_{zy} \cong C_{yy} \cong C_{zz} \cong 2S \left(\pi \frac{L}{D} \right)^2,$$

$$k_{zz} \cong 2k_{yy} \cong \frac{8W}{\pi C}, \quad k_{yz} \cong -k_{zy} \cong \frac{\pi \mu D \Omega}{8} \left(\frac{L}{C} \right)^3, \quad (6.30)$$

$$c_{yy} \cong c_{zz} \cong \frac{\pi \mu D}{4} \left(\frac{L}{C} \right)^3, \quad c_{yz} \cong c_{zy} \cong \frac{8W}{\pi C \Omega}.$$

Când $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ ($S \rightarrow \infty$ sau $W/\Omega \rightarrow 0$), rigiditățile directe, k_{yy} și k_{zz} , devin neglijabile în comparație cu rigiditățile transversale, k_{yz} și k_{zy} , coeficienții

de amortizare direcți, c_{yy} și c_{zz} , tind spre o valoare limită finită, în timp ce coeficienții de amortizare transversali, c_{yz} și c_{zy} , tind spre zero.

Pentru a avea o limită de stabilitate finită, un lagăr radial cu film de fluid trebuie să producă o forță de readucere radială. Dacă fusul are excentricitate zero, sau dacă este împiedicată cavitația fluidului, rigiditățile principale se anulează, fusul este inerent instabil și rotorul va avea o precesie instabilă la semifrecvență.

Rigiditățile transversale de cuplaj, k_{yz} și k_{zy} , sunt principala sursă de instabilitate. Pentru a produce instabilitate, coeficientul de cuplaj k_{zy} trebuie să fie negativ. Gradul maxim de instabilitate se atinge atunci când $k_{yz} = -k_{zy}$. Când k_{yz} devine negativ, stabilitatea sistemului crește rapid.

6.5.2 Soluția pentru lagăre de lungime infinită (Sommerfeld)

Soluția Sommerfeld a ecuației Reynolds se obține considerând $\partial p / \partial x = 0$, deci neglijând al doilea termen în membrul stâng al ecuației (6.14), și integrând în raport cu θ pentru a obține câmpul de presiuni. O scurtă expunere a metodei este prezentată în Secțiunea 7.3.4.1.

Deoarece condiția la limită Sommerfeld conduce la un rezultat eronat (deplasarea fusului este perpendiculară pe direcția sarcinii statice W) de obicei se utilizează condiția la limită Gumbel.

6.5.3 Soluția pentru lagăre cavitate de lungime finită (Moes)

După cum s-a arătat, pentru analiza dinamică a lagărelor s-au dezvoltat două soluții asimptotice: a) soluția pentru lagăre infinit scurte (Ocvirk) – cu excentricități relative mici și valori L/D foarte mici, și b) soluția pentru lagăre infinit lungi (Sommerfeld) – cu excentricități relative mari și rapoarte L/D mari.

Utilizând o sumă ponderată a soluțiilor asimptotice menționate mai sus, Moes și Childs [6.6] au obținut o soluție analitică valabilă pentru lagăre de lungime finită cu excentricități relative mari sau mici. În continuare se prezintă rezultatele pentru lagăre cavitate cu film π (condiția la limită Gumbel).

Se utilizează o forță adimensională

$$F_0^* = \frac{F_0}{\mu L C \Omega} \left(\frac{C}{R} \right)^3 \quad (6.31)$$

unde $F_0 = W$ este reacțiunea statică.

Se definește un vector al impedanței lagărului, a cărui intensitate în poziția de echilibru static este

$$Z_0 = \frac{F_0^*}{\varepsilon_0}.$$

Numărul Sommerfeld poate fi exprimat în funcție de impedanța lagărului

$$S = \mu \left(\frac{\Omega}{2\pi} \right) \frac{DL}{F_0} \left(\frac{R}{C} \right)^2 = \frac{1}{\pi \varepsilon_0 Z_0}. \quad (6.32)$$

În fig. 6.16 s-a reprezentat grafic dependența $S = S(\varepsilon_0)$ pentru câteva valori L/D . Curbele pot fi utilizate pentru determinarea lui ε_0 pe baza valorii lui S calculate din (6.32) pentru un anumit lagăr și o sarcină aplicată dată.

Unghiul de atitudine φ_0 în poziția de echilibru static este

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{4a \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{3b \varepsilon_0}$$

unde

$$a = 1 + 2,12B, \quad b = 1 + 3,60B,$$

$$B = (1 - \varepsilon_0^2) \left(\frac{L}{D} \right)^{-2}.$$

Amplitudinea vectorului impedanță în poziția de echilibru static este

$$Z_0 = \frac{1}{0,15 \sqrt{E_0^2 + G_0^2} d^{3/2}},$$

unde

$$d = 1 - \xi_0, \quad E_0 = 1 + 2,12Q_0,$$

$$G_0 = 3\eta_0 \frac{1 + 3,6Q_0}{4(1 - \xi_0)}, \quad Q_0 = (1 - \xi_0) \left(\frac{L}{D} \right)^{-2},$$

$$\xi_0 = \varepsilon_0 \cos \varphi_0, \quad \eta_0 = \varepsilon_0 \sin \varphi_0.$$

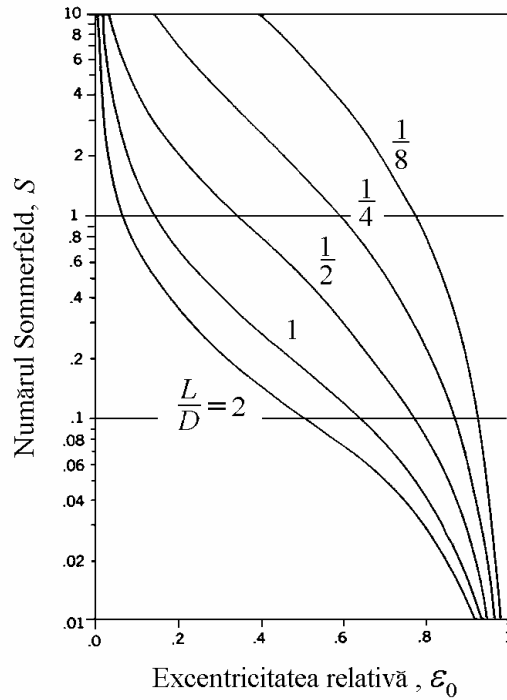


Fig. 6.16 [6.3]

Coefficienții fizici de rigiditate și de amortizare au expresiile

$$k_{ij} = \frac{F_0}{C} K_{ij}, \quad c_{ij} = \frac{F_0}{C\Omega} C_{ij}, \quad i, j = y, z \quad (6.33)$$

unde coeficienții de rigiditate adimensionali sunt

$$\begin{aligned} K_{zz} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cos \varphi_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \sin \varphi_0, \\ K_{zy} &= -\left(\frac{1}{\varepsilon_0} \sin \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \cos \varphi_0 \right), \\ K_{yz} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sin \varphi_0 + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} \frac{1}{Z_0} \sin \varphi_0, \\ K_{yy} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cos \varphi_0 + \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} \frac{1}{Z_0} \cos \varphi_0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

iar coeficienții de amortizare adimensionali sunt

$$\begin{aligned}
C_{zz} &= \frac{2}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \sin \varphi_0, \\
C_{zy} &= \frac{2}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cos \varphi_0, \\
C_{yz} &= -\frac{2}{\varepsilon_0} \left(\cos \varphi_0 + \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \frac{1}{Z_0} \sin \varphi_0 \right), \\
C_{yy} &= \frac{2}{\varepsilon_0} \left(\sin \varphi_0 - \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \frac{1}{Z_0} \cos \varphi_0 \right),
\end{aligned} \tag{6.35}$$

unde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial \alpha} &= \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \\
\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial Z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}, & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} &= \frac{\partial Z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial Z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} &= \frac{4}{3} \left[\frac{2(b-a)}{b^2} - \frac{a}{b} \frac{1}{\varepsilon_0^2} \right] \cos^2 \varphi_0 \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} &= 1 + \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \varepsilon_0 \right) \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}, \\
\frac{\partial Z}{\partial \xi} &= -Z_0 \left\{ \frac{1}{E_0^2 + G_0^2} \left[\frac{3G_0}{4} \frac{\eta_0}{d^2} - 2,12E_0 \left(\frac{L}{D} \right)^{-2} \right] - \frac{3}{2d} \right\}, \\
\frac{\partial Z}{\partial \eta} &= -Z_0 \frac{G_0^2}{E_0^2 + G_0^2} \frac{1}{\eta_0}, \\
\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} &= \cos \varphi_0 - \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \sin \varphi_0, & \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} &= -\varepsilon_0 \sin \varphi_0, \\
\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} &= \sin \varphi_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \cos \varphi_0, & \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} &= \varepsilon_0 \cos \varphi_0.
\end{aligned}$$

Se observă că $C_{yz} \neq C_{zy}$.

Coefficienții fizici ai lagărului hidrodinamic din Exemplul 6.1 sunt dați în Tabelul 6.2.

Tabelul 6.2

Frecv.	k_{yy}	k_{yz}	k_{zy}	k_{zz}	c_{yy}	c_{yz}	c_{zy}	c_{zz}
[Hz]	[N/m] $10^7 \times$				[Ns/m] $10^5 \times$			
10	8,4844	4,6560	0,6521	1,5066	1,0840	0,2292	0,2430	0,1333
20	5,8945	4,0755	0,3442	1,5749	4,8069	1,1958	1,2656	0,8750
30	4,7415	3,8018	0,1424	1,6261	3,0295	0,8249	0,8703	0,6978
40	4,0521	3,6379	-0,0188	1,6678	2,2017	0,6361	0,6692	0,6008
50	3,5814	3,5298	-0,1586	1,7033	1,7295	0,5208	0,5466	0,5387
60	3,2344	3,4553	-0,2854	1,7341	1,4269	0,4426	0,4636	0,4953
70	2,9658	3,4034	-0,4034	1,7614	1,2177	0,3858	0,4036	0,4631
80	2,7504	3,3677	-0,5153	1,7857	1,0652	0,3426	0,3579	0,4382
90	2,5734	3,3445	-0,6227	1,8076	0,9495	0,3085	0,3219	0,4184

6.6 Semnificația fizică a coeficienților dinamici ai lagărelor

Pentru a înțelege mai bine semnificația fizică a celor opt coeficienți dinamici liniarizați ai unui lagăr radial hidrodinamic, se va calcula lucrul mecanic efectuat de forțele din lagăr în lungul unei orbite de precesie închise [6.7].

Matricile nesimetrice de rigiditate și de amortizare se descompun în componenta simetrică (s) și componenta antisimetrică (a)

$$[k^b] = [k_s^b] + [k_a^b], \quad [c^b] = [c_s^b] + [c_a^b], \quad (6.36)$$

unde

$$[k_s^b] = \frac{1}{2} \left([k^b] + [k^b]^T \right), \quad [k_a^b] = \frac{1}{2} \left([k^b] - [k^b]^T \right), \quad (6.37)$$

$$[c_s^b] = \frac{1}{2} \left([c^b] + [c^b]^T \right), \quad [c_a^b] = \frac{1}{2} \left([c^b] - [c^b]^T \right). \quad (6.38)$$

Matricea de amortizare se scrie

$$[c^b] = \begin{bmatrix} c_{yy} & \frac{1}{2}(c_{yz} + c_{zy}) \\ \frac{1}{2}(c_{yz} + c_{zy}) & c_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(c_{yz} - c_{zy}) \\ -\frac{1}{2}(c_{yz} - c_{zy}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$[c^b] = \begin{bmatrix} c_{yy}^s & c_{yz}^s \\ c_{zy}^s & c_{zz}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_{yz}^a \\ -c_{zy}^a & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Matricea $[c_a^b]$ nu este o matrice de amortizare veritabilă, în sens disipativ. Ea descrie un câmp de forțe conservativ de tip giroscopic care, în absența altor efecte giroscopice adevărate, produce bifurcarea frecvențelor proprii în lungul a două ramuri cu precesie directă și precesie inversă. Într-adevăr, lucrul mecanic elementar efectuat de forțele respective în orice punct pe orice orbită este zero:

$$dW = \left(- \begin{bmatrix} 0 & c_{yz}^a \\ -c_{zy}^a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \right)^T \begin{Bmatrix} dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{yz}^a \dot{z} & c_{zy}^a \dot{y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dy \\ dz \end{Bmatrix},$$

$$dW = -c_{yz}^a \dot{z} (y dt) + c_{zy}^a \dot{y} (z dt) = -c_{yz}^a (\dot{z} y - y \dot{z}) dt \equiv 0. \quad (6.40)$$

Această proprietate conservativă arată că vectorul forțelor $[]$ este totdeauna perpendicular pe vectorul vitezelor $\{ \}$. La majoritatea lagărelor radiale hidrodinamice coeficienții de amortizare transversală (de intercuplaj) sunt egali și matricea antisimetrică se anulează.

Matricea de rigiditate poate fi scrisă

$$[k^b] = \begin{bmatrix} k_{yy} & \frac{1}{2}(k_{yz} + k_{zy}) \\ \frac{1}{2}(k_{yz} + k_{zy}) & k_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(k_{yz} - k_{zy}) \\ -\frac{1}{2}(k_{yz} - k_{zy}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$[k^b] = \begin{bmatrix} k_{yy}^s & k_{yz}^s \\ k_{zy}^s & k_{zz}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_{yz}^a \\ -k_{zy}^a & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Matricea $[k_a^b]$ nu este o matrice de rigiditate veritabilă deoarece nu produce o forță radială directă de readucere. Ea implică o forță circulatorie neconservativă. Lucrul mecanic elementar efectuat de această forță în orice punct pe orice orbită poate fi scris sub forma

$$dW = \left(- \begin{bmatrix} 0 & k_{yz}^a \\ -k_{zy}^a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \right)^T \begin{Bmatrix} dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{yz}^a z & k_{zy}^a y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dy \\ dz \end{Bmatrix},$$

$$dW = -k_{yz}^a z dy + k_{zy}^a y dz = f_y dy + f_z dz. \quad (6.42)$$

Deoarece $\frac{\partial f_y}{\partial z} \neq \frac{\partial f_z}{\partial y}$, dW nu este o diferențială exactă. Lucrul mecanic efectuat între două puncte depinde de traiectorie și deci forța este neconservativă.

Într-un ciclu complet de precesie, energia rezultată din $[k_a^b]$, transmisă rotorului este

$$E_{ciclu} = -k_{yz}^a \oint (z dy - y dz). \quad (6.43)$$

Descompunând această integrală în două integrale de linie între punctele A ($y_A = y_{min}$) și B ($y_B = y_{max}$) (fig. 6.17), și integrând termenii dy prin părți, rezultă ($z_2 > z_1$):

$$E_{ciclu} = 2k_{yz}^a \int_{y_A}^{y_B} (z_2 - z_1) dy. \quad (6.44)$$

Integrala este egală cu aria suprafeței închise de orbită. Ea este pozitivă pentru precesie directă și negativă pentru precesie inversă. În general, $k_{yz}^a \geq 0$ la lagărele hidrodinamice. Astfel, efectul matricii $[k_a^b]$ reprezintă amortizare “negativă” în precesia directă și amortizare pozitivă în precesia inversă. În cazul orbitelor degenerate în linie dreaptă, când $\int_{y_A}^{y_B} z_2 dy = \int_{y_A}^{y_B} z_1 dy$, energia transferată pe un ciclu de precesie este zero.

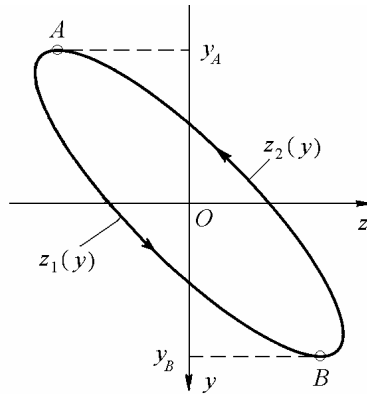


Fig. 6.17

În cazul unei orbite de precesie închise, descrise de ecuațiile parametrice

$$\begin{aligned} y &= A_y \cos(\omega t + \theta_y), \\ z &= A_z \cos(\omega t + \theta_z), \end{aligned} \quad (6.45)$$

lucrul mecanic efectuat de forțele din lagăr (atenție la semnul minus)

$$\begin{aligned} F_y &= -k_{yy}y - k_{yz}z - c_{yy}\dot{y} - c_{yz}\dot{z}, \\ F_z &= -k_{zy}y - k_{zz}z - c_{zy}\dot{y} - c_{zz}\dot{z}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

într-un ciclu de precesie este

$$W = \oint (F_y dy + F_z dz) = \int_0^T (F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt. \quad (6.47)$$

Se calculează următoarele integrale:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (k_{yy}y\dot{y} + k_{zz}z\dot{z}) dt = 0, \\ & - \int_0^T (k_{yz}z\dot{y} + k_{zy}y\dot{z}) dt = \pi (k_{yz} - k_{zy}) A_y A_z \sin(\theta_y - \theta_z), \\ & - \int_0^T (c_{yy}\dot{y}^2 + c_{zz}\dot{z}^2) dt = -\pi \omega (c_{yy}A_y^2 + c_{zz}A_z^2), \\ & - \int_0^T (c_{yz}\dot{z}\dot{y} + c_{zy}\dot{y}\dot{z}) dt = -\pi \omega (c_{yz} + c_{zy}) A_y A_z \cos(\theta_y - \theta_z). \end{aligned}$$

Energia transmisă pe ciclu rotorului este

$$\begin{aligned} W &= \pi (k_{yz} - k_{zy}) A_y A_z \sin(\theta_y - \theta_z) - \\ & - \pi \omega (c_{yz} + c_{zy}) A_y A_z \cos(\theta_y - \theta_z) - \pi \omega (c_{yy}A_y^2 + c_{zz}A_z^2), \end{aligned} \quad (6.48)$$

în care termenul pozitiv reprezintă energie transmisă, iar termenul negativ reprezintă energie disipată.

Atunci când k_{yz} este pozitiv, coeficienții de rigiditate transversală (de cuplaj) pot transmite energie rotorului, deci produc amortizare “negativă”.

Primul termen se mai poate scrie

$$\begin{aligned} W_{transm} &= \pi (k_{yz} - k_{zy}) A_y A_z \sin(\theta_y - \theta_z) = \\ &= \pi (k_{yz} - k_{zy}) (A_y \sin\theta_y A_z \cos\theta_z - A_y \cos\theta_y A_z \sin\theta_z) = \\ &= \pi (k_{yz} - k_{zy}) (-y_s z_c + z_s y_c) = \pi (k_{yz} - k_{zy}) a b, \end{aligned}$$

$$W_{transm} = \pi (k_{yz} - k_{zy}) \left(|\bar{r}_f|^2 - |\bar{r}_b|^2 \right), \quad (6.49)$$

unde orbita eliptică a fost descompusă în două orbite circulare, una cu precesie directă și raza $|\bar{r}_f|$, cealaltă cu precesie inversă și raza $|\bar{r}_b|$.

Pentru $k_{yz} > 0$, dacă $|\bar{r}_f| > |\bar{r}_b|$, $b > 0$, precesia este directă și $W_{transm} > 0$. Amortizarea “negativă” este produsă de componenta cu precesie directă.

6.7 Temperatura lagărelor

În orice aplicație practică se cunosc geometria lagărelor, sarcina statică, tipul de lubrifianț și proprietățile acestuia. Pentru determinarea coeficienților lagărelor la o viteză unghiulară Ω trebuie întâi determinată vâscozitatea lubrifianțului. Pentru aceasta se poate utiliza o metodă iterativă [6.4].

6.7.1 Temperatura aproximativă a unui lagăr

Se estimează o valoare a temperaturii și se determină vâscozitatea corespunzătoare utilizând diagrama vâscozitate-temperatură a lubrifianțului (fig. 6.18). Se poate astfel calcula numărul Sommerfeld pe baza căruia, din tabele cu proprietățile lagărelor, se determină următorii parametri adimensionali:

- coeficientul de debit de scăpări

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\frac{1}{2} \pi N D L C}, \quad (6.50)$$

în care Q este debitul de lubrifianț obținut prin integrarea gradientului de presiune la marginea lagărului;

- coeficientul puterii consumate prin frecare

$$\bar{P} = \frac{C P}{\pi^3 \mu N^2 L D^3}, \quad (6.51)$$

unde P este puterea disipată prin frecare;

- coeficientul creșterii temperaturii

$$\bar{T} = \frac{\Delta T}{\frac{\mu \Omega}{c_v} \left(\frac{R}{C}\right)^2}, \quad (6.52)$$

Creșterea temperaturii ΔT prin filmul de lubrifiant se poate calcula dintr-o formă simplificată a ecuației energiei, neglijând conducția.

Din bilanțul termic pentru un element axial infintesimal de fluid, de grosime h_{min} și lățime $R d\theta$, rezultă

$$c_v q_z \frac{dT}{R d\theta} \cong \tau R \Omega \cong \mu \frac{(R \Omega)^2}{h_{min}},$$

unde c_v este căldura specifică pe unitatea de volum și T este temperatura.

Cu presupunerile de mai sus, q_z este egal cu debitul de forfecare

$$q_z = \frac{1}{2} h_{min} R \Omega. \quad (6.53)$$

Ecuția de bilanț termic se reduce la

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{2}{c_v} R^2 \Omega \frac{\mu}{h_{min}^2}. \quad (6.54)$$

Pentru orice lubrifiant, vâscozitatea μ este o funcție dată de temperatura T . Variația temperaturii, și deci a vâscozității, în lungul filmului poate fi calculată din egalitatea

$$\int_{T_1}^T \frac{dT}{\mu} = \frac{2}{c_v} R^2 \Omega \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{h_{min}^2}.$$

Totuși, de obicei se presupune $\mu = const.$, egală cu o valoare medie, deci creșterea totală a temperaturii este

$$\Delta T = \frac{2}{c_v} \mu R^2 \Omega \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{h_{min}^2}. \quad (6.55)$$

Presupunând că, de exemplu, 80 % din căldura generată prin frecare este evacuată de lubrifiant, temperatura de lucru a lagărului, T_{oper} , se obține dintr-un simplu bilanț termic sub forma

$$T_{oper} = T_{sursa} + 0.8 \frac{\mu \Omega}{c_v} \left(\frac{R}{C} \right)^2 4\pi \frac{\bar{P}}{\bar{Q}}, \quad (6.56)$$

unde T_{sursa} este temperatura sursei de lubrifiant.

Temperatura maximă în film este

$$T_{max} = T_{oper} + \Delta T = T_{oper} + \frac{\mu \Omega}{c_v} \left(\frac{R}{C} \right)^2 \bar{T}. \quad (6.57)$$

Dacă T_{max} diferă de temperatura estimată inițial, trebuie efectuat un nou calcul utilizând o valoare a vâscozității calculată la T_{max} , repetând calculele până cele două temperaturi coincid. După obținerea valorii corecte a numărului Sommerfeld, coeficienții de rigiditate și de amortizare se obțin fie din tabele, necesitând interpolare, fie cu ajutorul formulelor.

6.7.2 Relația vâscozitate-temperatură

Vâscozitatea uleiurilor lubrifiante este extrem de sensibilă la temperatura de lucru (fig. 6.18). Vâscozitatea uleiurilor scade rapid cu creșterea temperaturii (până la 80% pentru o creștere a temperaturii de 25°C). Este important să se cunoască vâscozitatea la temperatura de lucru, deoarece aceasta determină numărul Sommerfeld utilizat la calculul coeficienților dinamici ai lagărelor. Vâscozitatea uleiului la o anumită temperatură poate fi calculată fie dintr-o ecuație vâscozitate-temperatură, fie din diagrama vâscozitate-temperatură elaborată de ASTM.

De obicei vâscozitatea cinematică se măsoară în centistokes (cSt) iar vâscozitatea dinamică (absolută) se măsoară în centipoise (cP). La 20°C apa are vâscozitatea 1,0020 cP. În unități SI, $1 \text{ cP} \cong 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ și $1 \text{ cSt} = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Ecuația lui Walther [6.8] are forma

$$(\nu + a) = b d^{1/T^c},$$

în care a , b , c , d sunt constante, T este temperatura absolută, K, și ν este vâscozitatea cinematică, m^2/s . Vâscozitatea cinematică este definită ca raportul între vâscozitatea dinamică și densitatea fluidului, $\nu = \mu/\rho$. Uleiurile minerale au densități de ordinul $850 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Cea mai utilizată este *diagrama vâscozitate-temperatură ASTM D341*, total empirică și bazată pe ecuația lui Walther.

La construcția diagramei ASTM, s-au logaritmat cei doi membri ai ecuației lui Walther și s-a considerat că $d = 10$, rezultând

$$\log_{10}(\nu + a) = \log_{10}b + 1/T^c .$$

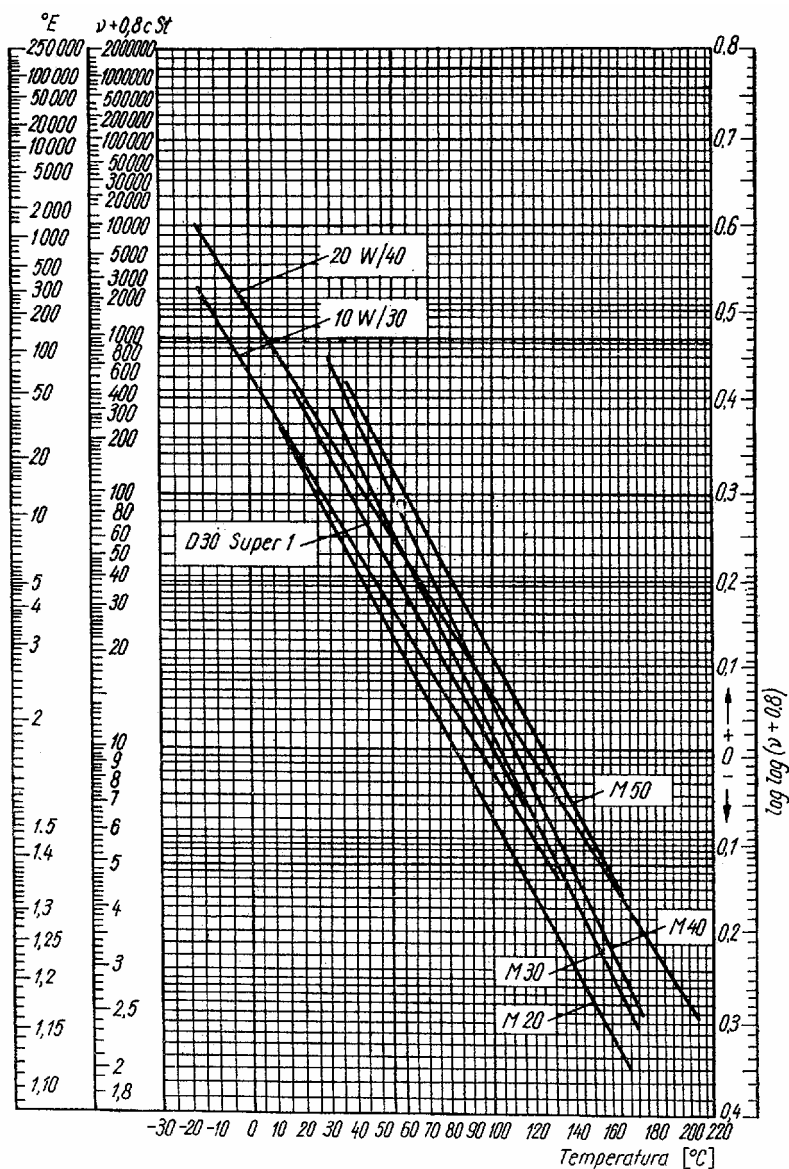


Fig. 6.18 [6.2]

S-a observat că dacă ν este în cS (centistokes), atunci $a \cong 0,7$. După înlocuirea în ecuație, logaritizarea s-a făcut incorect sub forma

$$\log_{10} \log_{10}(\nu_{cS} + 0,7) = a' - c \cdot \log_{10} T, \quad (6.58)$$

unde a' și c sunt constante. Pentru a putea utiliza această ecuație, vâscozitatea cinematică trebuie să fie mai mare de 2 cS. Pentru vâscozități mai mici, constanta 0,7 crește conform relațiilor date în ASTM D341.

În diagrama ASTM, ordonata este $\log_{10} \log_{10}(\nu_{cS} + 0,7)$ iar abscisa este $\log_{10} T$. În pofida erorii matematice, diagrama ASTM este utilizată frecvent și dă rezultate bune pentru uleiuri minerale și sintetice în condiții normale. Figura 6.18 este o diagramă Walther-Ubbelohde pentru uleiuri utilizate la motoare cu ardere internă. O diagramă similară există pentru uleiuri de turbine [6.2].

Vâscozitatea variază puternic cu temperatura și presiunea. Ca regulă generală, cu cât un ulei este mai vâscos cu atât este mai susceptibil la variații ale proprietăților. Cu cât uleiul este mai gros, cu atât derivata vâscozității în funcție de temperatură este mai mare. O măsură a descreșterii vâscozității cu creșterea temperaturii este *indicele de vâscozitate* (*viscosity index* – V.I.) (Dean and Davis, 1929). Temperaturile de referință standard utilizate în industria uleiurilor sunt 100°F ($37,8^{\circ}\text{C}$) și 210°F (99°C). Uleiurilor minerale parafinice de cea mai bună calitate (din Pennsylvania) li s-a atribuit indicele de vâscozitate 100 iar uleiurilor naftenice de cea mai slabă calitate (din Texas) un V.I. egal cu zero. Societatea Americană a Inginerilor de Automobile (SAE) a împărțit uleiurile în calități (*grades*). Un ulei 5W are vâscozitatea maximă 1200 cP la 0°F și vâscozitatea minimă 3,9 cP la 210°F . Un ulei 10W are o vâscozitate maximă între 1200 și 2400 cP la 0°F și o vâscozitate minimă de 3,9 cP la 210°F . Un ulei 20W are vâscozitatea între 2400 și 9600 cP la 0°F și o vâscozitate minimă de 3,9 cP la 210°F . Un ulei SAE 20 are vâscozitatea între 5,7 and 9,6 cS la 210°F . Uleiurile SAE 30, SAE 40, SAE 50 au vâscozități între 9,6-12,9, 12,9-16,8 și respectiv 16,8-22,7 cS.

Unele uleiuri, în care se adaugă polimeri, au indici de vâscozitate ridicați (în jur de 150), și se numesc *uleiuri "multigrad"* (cu calități multiple). Aceasta deoarece ele au o calitate la 0°F și altă calitate la 210°F . De exemplu, un ulei 10W/30 poate avea vâscozitatea 2100 cP la 0°F și 11,5 cS la 210°F . El intră în categoria 10W la 0°F și SAE 30 la 210°F . De aceea se numește 10W/30 [6.8].

Ar fi avantajos să se producă un ulei gros cu derivata vâscozitate-temperatură a unui ulei mai subțire. Într-o oarecare măsură (2-3 %) aceasta se poate realiza prin adăugarea unui polimer de îngroșare, de exemplu un metacrilat. Rezultă un ulei multigrad. Un ulei poate fi un SAE 10 la 100°F și SAE 30 la 210°F , fiind denumit SAE 10/30.

6.8 Lagăre radiale hidrodinamice

În evoluția mașinilor rotative s-au dezvoltat diferite configurații de lagăre radiale autoportante pentru ameliorarea performanțelor mașinii, majoritatea în scopul creșterii stabilității rotorului.

6.8.1 Lagăre circulare cu cuzinet complet

Lagărul circular cu cuzinet complet (fig. 6.2) prezentat mai sus este cea mai simplă soluție constructivă cu geometrie fixă, adecvată pentru rotoare cu încărcare mare sau turație joasă, care pot deveni instabile. Principalele avantaje ale acestui tip de lagăre sunt costul redus și ușurința fabricării.

În poziția centrată, învelișul cilindric al cuzinetului este concentric cu suprafața fusului, deci nu există preîncărcare. Lagărele hidrodinamice cu cuzinet complet au însă cel mai puternic cuplaj transversal, fiind configurația cea mai destabilizatoare.

6.8.2 Lagăre cu canale axiale

Majoritatea lagărelor radiale cilindrice (fig. 6.19) au fante de alimentare orizontale (sau buzunare laterale).

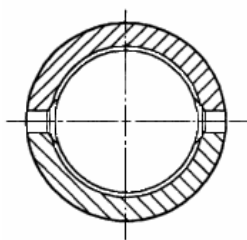


Fig. 6.19

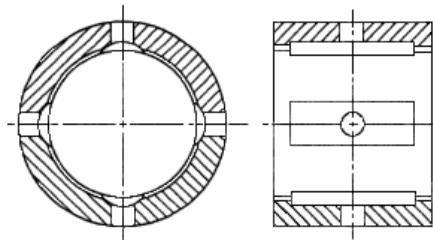


Fig. 6.20

Lagărul radial cu patru fante de alimentare (fig. 6.20) are patru buzunare laterale la 90^0 , dispuse la 45^0 față de axa verticală (figura este rotită). Nu există preîncărcare, dar soluția constructivă este mai stabilă în unele aplicații decât lagărul cu cuzinet complet.

În Tabelul 6.3 se dau coeficienții dinamici adimensionali pentru un lagăr cu două fante axiale și $L/D = 0,5$ în funcție de numărul Sommerfeld [6.1]. În figura 6.21 se dau coeficienții dinamici adimensionali pentru un lagăr cu $L/D = 1$.

Tabelul 6.3

Coeficienții dinamici ai unui lagăr cu două fante axiale, $L/D = 0,5$

S	Coeficienții de rigiditate				Coeficienții de amortizare			
	K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}	C_{yy}	C_{yz}	C_{zy}	C_{zz}
5,96	1,77	13,6	-13,1	2,72	27,2	2,06	2,06	14,9
4,43	1,75	10,3	-9,66	2,70	20,6	2,08	2,08	11,4
2,07	1,88	5,63	-4,41	2,56	11,2	2,22	2,22	6,43
1,24	2,07	4,27	-2,56	2,34	8,50	2,32	2,32	4,73
0,798	2,39	3,75	-1,57	2,17	7,32	2,24	2,24	3,50
0,517	2,89	3,57	-0,924	2,03	6,81	2,10	2,10	2,60
0,323	3,65	3,62	-0,427	1,92	6,81	2,08	2,08	2,06
0,187	4,92	3,88	0,0235	1,83	7,32	2,16	2,16	1,70
0,135	5,90	4,11	0,258	1,80	7,65	2,10	2,10	1,46
0,0926	7,35	4,46	0,527	1,78	8,17	2,05	2,05	1,24
0,0582	9,56	4,92	0,805	1,73	9,12	2,06	2,06	1,06
0,0315	13,8	5,76	1,24	1,72	10,6	2,03	2,03	0,846
0,00499	43,3	9,61	4,26	1,99	22,4	2,93	2,93	0,637

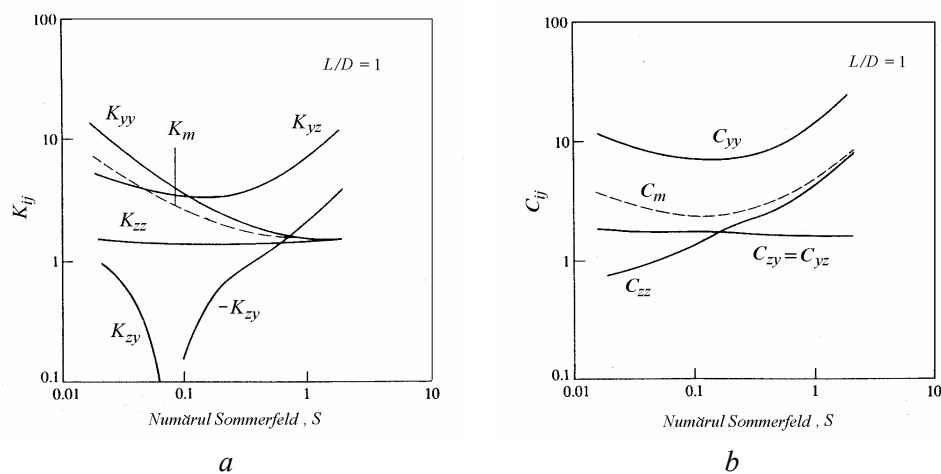


Fig. 6.21 [6.9]

În calcule simplificate se utilizează valorile medii [6.9]

$$\begin{aligned}
 K_m &= \frac{1}{2} (K_{yy} + K_{zz}) + \frac{\Omega}{2} (C_{yz} - C_{zy}), \\
 C_m &= \frac{1}{2} (C_{yy} + C_{zz}) + \frac{1}{2\Omega} (K_{zy} - K_{yz}),
 \end{aligned}
 \tag{6.59}$$

reprezentate cu linii întrerupte.

6.8.3 Lagăre cu treaptă de presiune

Un lagăr cu treaptă de presiune (fig. 6.22) este un lagăr cu cuzinet complet modificat în partea de sus, unde există o degajare (adâncitură) centrală terminată brusc cu o treaptă. Lubrifianțul antrenat în mișcare în jurul fusului întâlnește treapta care determină o creștere a presiunii în partea superioară a fusului (fig. 6.23), dând naștere unei forțe stabilizatoare dirijate în jos. Aceasta împinge rotorul în jumătatea inferioară a lagărului într-o poziție cu excentricitate mai mare, ceea ce mărește stabilitatea acestuia.

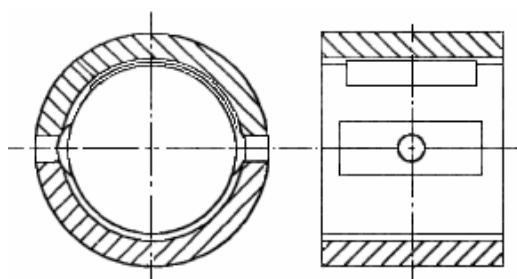


Fig. 6.22

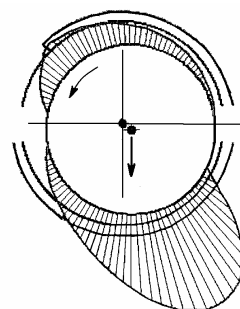


Fig. 6.23

Lagărele cu treaptă de presiune consumă mai multă putere decât lagărele cu cuzinet complet și sunt mai scumpe datorită prelucrării precise pentru realizarea geometriei corecte a interstițiului în treaptă. Ele au o capacitate mare de încărcare și măresc stabilitatea rotorului.

O configurație îmbunătățită include o adâncitură circumferențială în semicuzinetul inferior, așa cum se arată schematic în fig. 6.24. Acest canal reduce raportul L/D al porțiunii de lagăr care preia sarcina și mărește încărcarea pe lagăr.

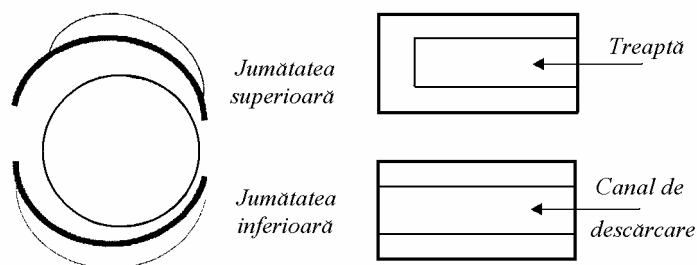


Fig. 6.24

În figura 6.25 se prezintă coeficienții dinamici adimensionali ai unui lagăr cu treaptă de presiune și $L/D=1$, în funcție de numărul Sommerfeld. Valorile numerice ale acestor coeficienți sunt date în Tabelul 6.4 [6.1].

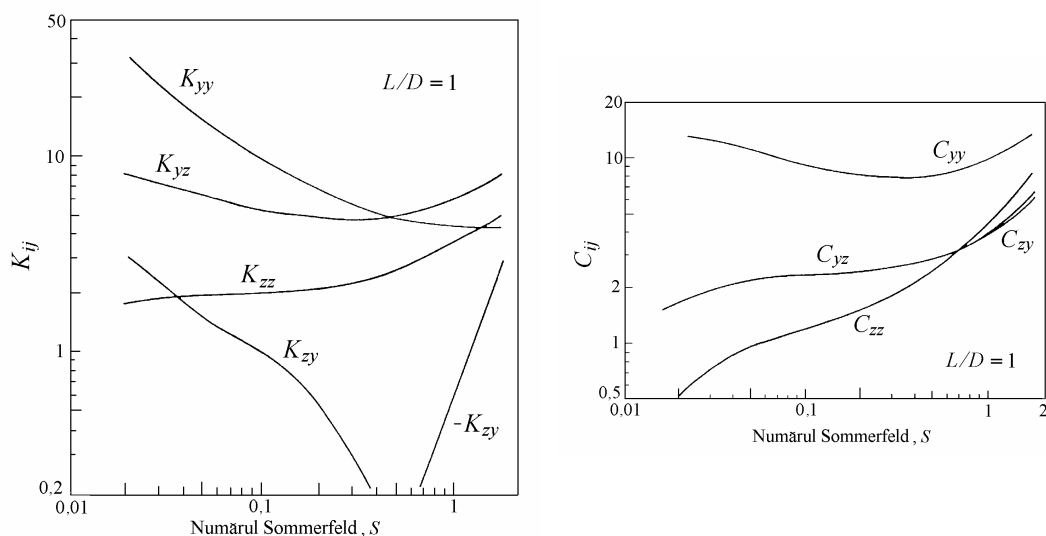


Fig. 6.25 [6.1]

Tabelul 6.4

Coeficienții dinamici ai unui lagăr cu treaptă de presiune, $L/D=1$

S	Coeficienții de rigiditate				Coeficienții de amortizare			
	K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}	C_{yy}	C_{yz}	C_{zy}	C_{zz}
1,72	4,59	8,55	-2,77	5,3	14,0	6,15	5,90	8,44
1,09	4,67	6,8	-0,832	4,19	10,8	4,38	4,37	5,18
0,742	4,72	5,79	-0,273	3,34	9,24	3,46	3,46	3,6
0,517	4,85	5,22	-0,0993	2,85	8,08	2,95	2,95	2,72
0,362	5,43	5,11	0,231	2,50	8,30	2,84	2,84	2,11
0,249	6,20	4,85	0,414	2,21	8,01	2,63	2,64	1,70
0,165	7,57	5,15	0,697	2,17	8,58	2,42	2,43	1,52
0,102	9,69	5,33	0,985	2,05	8,95	2,39	2,40	1,21
0,0558	14,10	6,28	1,38	1,99	10,8	2,33	2,34	1,01
0,0219	30,0	7,86	2,91	1,82	13,0	1,77	1,78	0,555

Tabelul 6.5

Coeficienții dinamici ai unui lagăr din două jumătăți decalate, $L/D = 0,5$, $m_p = 0,5$

S	Coeficienții de rigiditate				Coeficienții de amortizare			
	K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}	C_{yy}	C_{yz}	C_{zy}	C_{zz}
8,519	47,06	82,04	5,48	64,74	97,59	45,00	45,00	59,71
4,240	23,60	41,06	2,64	32,32	49,04	22,62	22,62	29,94
2,805	15,81	27,42	1,65	21,49	32,97	15,22	15,22	20,06
2,081	11,93	20,61	1,12	16,05	25,01	11,56	11,56	15,15
1,339	8,08	13,79	0,54	10,56	17,15	7,98	7,98	10,25
0,953	6,18	10,39	0,20	7,78	13,34	6,31	6,31	7,83
0,717	5,14	8,45	-0,05	6,15	11,29	5,43	5,43	6,51
0,555	4,63	7,20	-0,09	5,00	10,00	4,76	4,76	5,38
0,493	4,56	6,72	0,01	4,53	9,49	4,38	4,38	4,74
0,353	4,63	5,78	0,22	3,53	8,51	3,56	3,56	3,40
0,284	4,85	5,40	0,33	3,08	8,17	3,18	3,18	2,79
0,228	5,18	5,15	0,42	2,74	7,99	2,88	2,88	2,34
0,182	5,65	5,01	0,51	2,48	7,95	2,65	2,65	1,98
0,162	5,93	4,97	0,55	2,37	7,97	2,53	2,53	1,82
0,143	6,26	4,95	0,606	2,27	8,02	2,46	2,46	1,69
0,126	6,64	4,95	0,65	2,19	8,10	2,38	2,38	1,56

6.8.4 Lagăre cu semicuzineți decalate

Un lagăr radial din două jumătăți decalate (“offset split”) este prezentat în fig. 6.26, *a*. Lagărul este preîncărcat în direcție orizontală prin deplasarea relativă orizontală a celor două jumătăți. De obicei deplasarea d este jumătate din jocul radial C . Prin creșterea decalajului, lagărele cu semicuzineți decalate pot prelua sarcini mai mari.

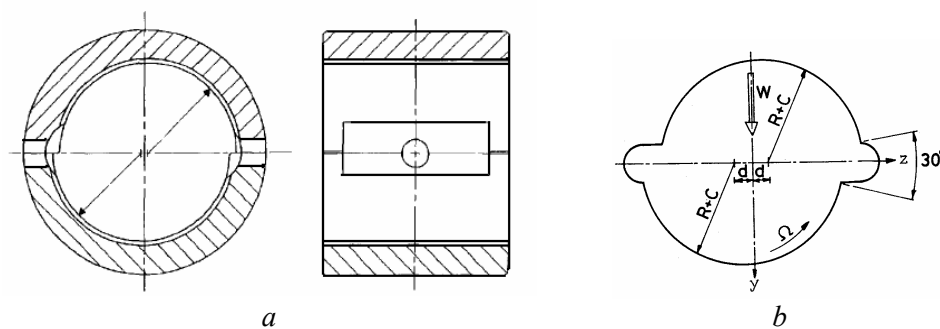


Fig. 6.26

Lagărul este fabricat prin decalarea semicuzineților înainte de găurirea de finisare, astfel încât, atunci când se montează semicuzineții, centrele bușelor să fie decalate orizontal. Jocul orizontal este mai mare decât jocul vertical. Jocul vertical este egal cu jocul de prelucrare al cuzinetului. Jocul orizontal este egal cu jocul diametral de prelucrare al cuzinetului minus de două ori decalajul radial.

Acest lagăr este mai stabil decât lagărul circular cu cuzinet complet, având totuși o tendință de instabilitate. El este un lagăr unidirecțional.

În Tabelul 6.5 se dau coeficienții dinamici adimensionali pentru un lagăr cu semicuzineți decalati, $L/D = 0,5$ și $d = 0,5C$, în funcție de numărul Sommerfeld [6.4].

6.8.5 Lagăre cu lobi ficși

Acestea constau din mai multe segmente de lagăr cu geometrie fixă, găurite cu o rază mai mare decât jocul din lagăr, creând astfel o preîncărcare geometrică. În timp ce lagărele “scobite” constau dintr-un număr de arce parțiale cu același centru, lagărele lobate constau din arce parțiale ale căror centre nu coincid.

6.8.5.1 Preîncărcarea lagărului

Se consideră fusul în poziția concentrică (fig. 6.27). Segmentul lagărului (lobul), prelucrat cu raza interioară R_p , are centrul în punctul O_p . Centrul lagărului este $O_B \equiv O_J$. Gaura lagărului are o rază R_B care este distanța de la centrul lagărului la suprafața segmentului (patinei) în punctul de joc minim.

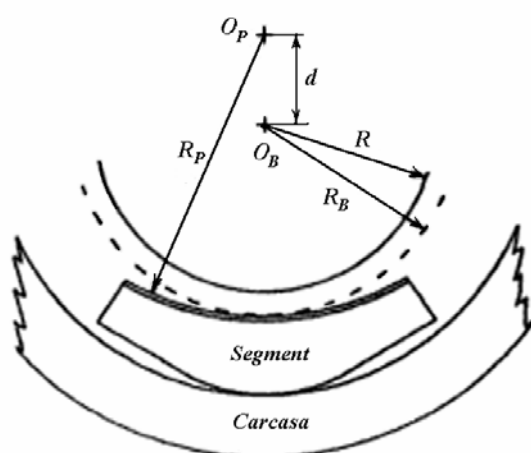


Fig. 6.27

Dacă O_P coincide cu O_B , atunci $R_P = R_B$ și preîncărcarea este nulă. În acest caz, dacă fusul este centrat în lagăr, arcul segmentului va fi concentric cu suprafața fusului. Dacă raza segmentului este mai mare decât raza lagărului, deci dacă $R_P > R_B$, atunci centrele de curbură vor fi decalate.

Factorul de preîncărcare m_p este definit ca

$$m_p = 1 - \frac{C_b}{C_p}, \quad (6.60)$$

unde $C_p = R_P - R$ este jocul la prelucrare, considerat de obicei ca jocul în lagăr, și $C_b = R_B - R$ este jocul la montaj. Dacă raza segmentului este menținută fixă, preîncărcarea crește deplasând segmentul radial spre arbore. Distanța între centrul de curbură al segmentului și centrul lagărului este

$$d = R_P - R_B = C_p - C_b = m_p C_p. \quad (6.61)$$

Forțele de preîncărcare forțează uleiul în interstițiul convergent al fiecărui lob, datorită jocului redus la mijlocul segmentului. Rezultă un efect de pană.

6.8.5.2 Lagăre eliptice (lămâie)

Lagărele eliptice (cu doi lobi) constau din două arce parțiale (fig. 6.28). Centrul arcului inferior este deasupra centrului lagărului, în timp ce centrul arcului superior este situat sub centrul lagărului. Efectul acestui aranjament este preîncărcarea lagărului. Jocurile mici în punctele de grosime minimă a interstițiului pot produce temperaturi minime mai ridicate, dar jocurile largi din planul de separație permit accesul unor cantități mari de ulei rece.

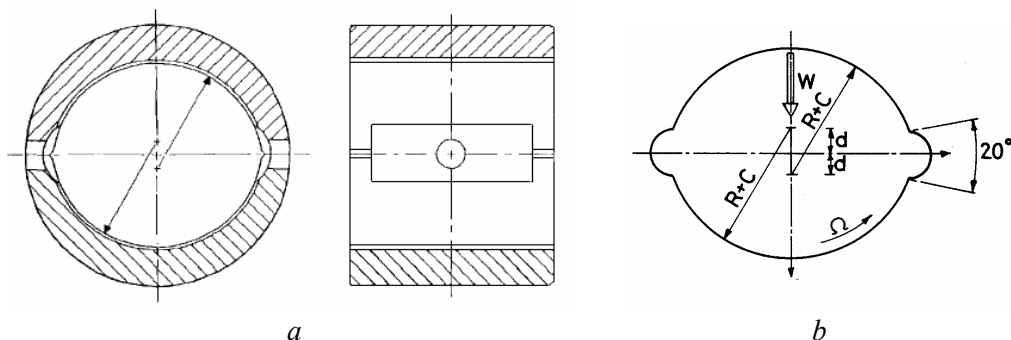


Fig. 6.28

La fabricarea lagărelor eliptice, între cele două jumătăți se pun plăcuțe de reglaj (bailag-uri), se prelucrează gaura, apoi cele două segmente sunt asamblate după înlăturarea plăcuțelor, așa cum se arată în fig. 6.29.

În fig. 6.30 se arată un exemplu de distribuție a presiunii pe circumferința fusului. Interstițiul în formă de pană format în jumătatea superioară crează o presiune dirijată în jos, care anulează precesia instabilă în cazul lagărelor marginal instabile. În același timp, crește excentricitatea centrului fusului, ceea ce determină creșterea rigidității.

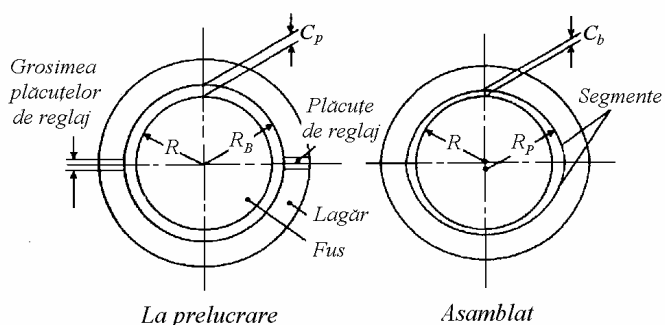


Fig. 6.29 [6.1]

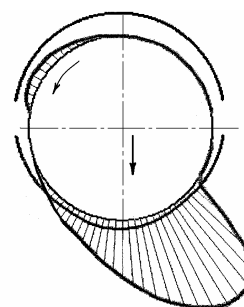


Fig. 6.30

În figura 6.31 se prezintă variația coeficienților dinamici adimensionali ai unui lagăr eliptic (cu doi lobi) cu $L/D = 0,5$ și $m_p = 3/4$, pentru condiții la limită de tip Reynolds, în funcție de numărul Sommerfeld. În Tabelul 6.6 [6.1] se dau valori numerice ale acestor coeficienți

Tabelul 6.6

Coeficienții dinamici adimensionali ai unui lagăr eliptic, $L/D = 0,5$, $m_p = 3/4$

S	Coeficienții de rigiditate				Coeficienții de amortizare			
	K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}	C_{yy}	C_{yz}	C_{zy}	C_{zz}
5,06	474	72	-215	49,8	548	-157	-157	92,5
3,01	282	40,6	-128	29,7	319	-94,3	-94,1	54,4
2,04	186	26,5	-86,7	18,2	215	-63,8	-63,6	36,9
0,983	93,7	12,7	-43,2	9,79	106	-30,8	-30,7	17,9
0,477	46,6	6,83	-20,4	4,79	50,9	-15	-15	8,77
0,286	29,5	4,91	-12,3	3,24	33	-8,45	-8,42	5,45
0,197	22,4	3,88	-8,44	2,35	24,7	-5,76	-5,75	3,93
0,0999	15,6	3,82	-3,75	1,61	16,1	-2,13	-2,09	2,24
0,0504	14,7	4,36	-1,11	1,4	12,3	0,085	0,0901	1,32
0,0306	16,9	5,21	0,0379	1,49	11,2	0,582	0,586	0,978
0,0199	20,1	6,32	1,08	1,62	12,1	1,24	1,25	0,866
0,00976	29,8	9,04	2,59	1,93	15,8	2,63	2,66	0,84

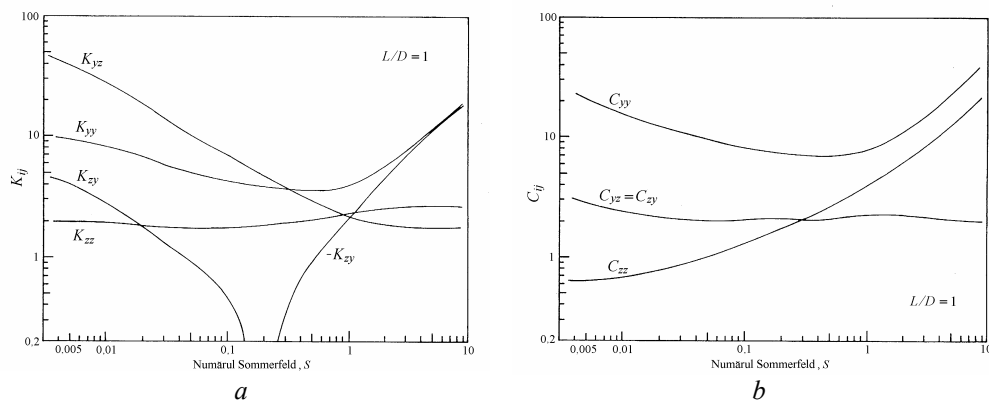


Fig. 6.31 [6.1]

6.8.5.3 Lagăre cu trei lobi și cu patru lobi

Lagărele cu trei lobi (fig. 6.32, *a*) și lagărele cu patru lobi (fig. 6.33) au segmente fixe (numite lobi) prelucrate cu o rază interioară mai mare decât raza fusului plus jocul în lagărul montat.

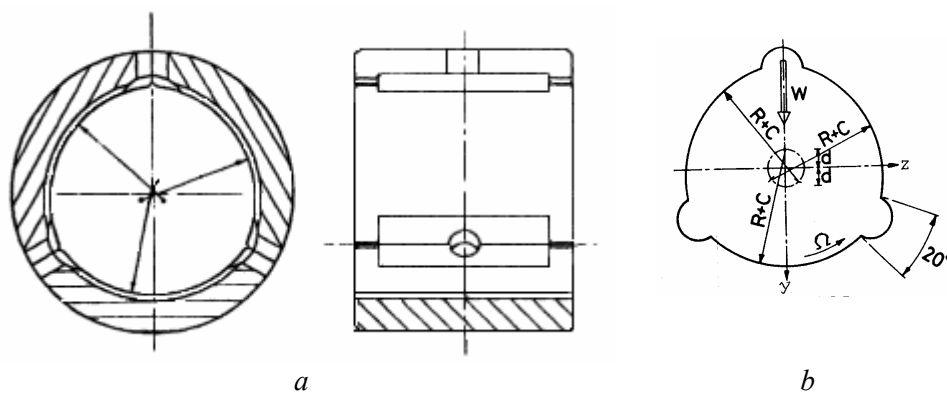


Fig. 6.32

Există configurații cu cinci sau mai mult de zece lobi. Lobii pot fi convergent-divergenți pentru fiecare segment sau doar convergenți.

Suprafața interioară a unui lagăr cu trei lobi (fig. 6.32, *b*) este compusă din trei segmente în formă de arc de cerc ale căror centre sunt deplasate unul față de altul și față de centrul comun al lagărului, producând o preîncărcare. Cele trei pene de lubrifiant formate în jurul fusului, rigidizează și stabilizează lagărul, chiar atunci când fusul este în poziția centrată. Prin creșterea numărului lobilor, în jurul fusului se formează mai multe pene de lubrifiant, îmbunătățind stabilitatea lagărului. Preîncărcarea poate fi modificată variind razele lobilor și raza ansamblului.

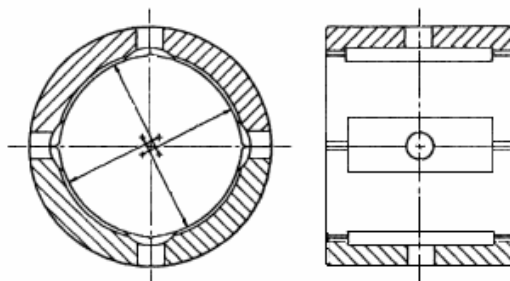


Fig. 6.33

În figurile 6.34 și 6.35 se prezintă variația coeficienților dinamici adimensionali pentru un lagăr cu trei lobi și un lagăr cu patru lobi, cu $L/D = 0,5$ și $m_p = 3/4$, pentru condiții la limită Reynolds, în funcție de numărul Sommerfeld. În Tabelele 6.7 și 6.8 [6.1] se dau valori numerice ale acestor coeficienți.

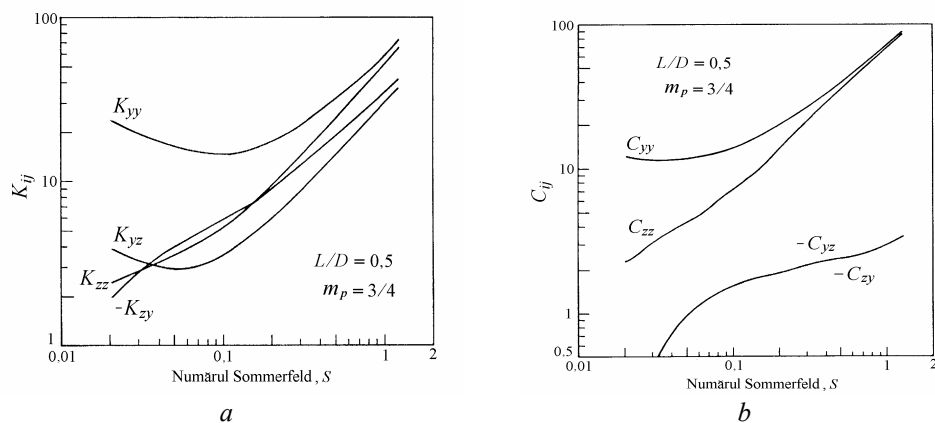


Fig. 6.34 [6.1]

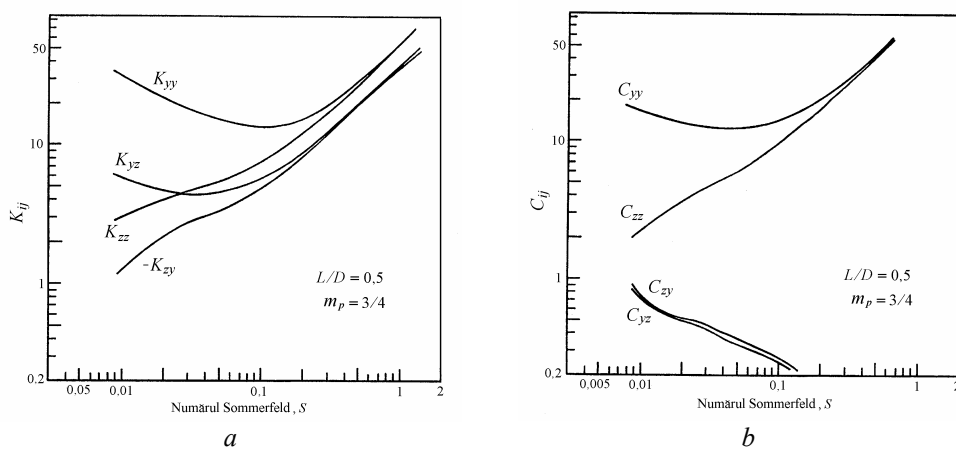


Fig. 6.35 [6.1]

Tabelul 6.7

Coeficienții dinamici adimensionali ai unui lagăr cu trei lobi, $L/D = 0,5$, $m_p = 3/4$

S	Coeficienții de rigiditate				Coeficienții de amortizare			
	K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}	C_{yy}	C_{yz}	C_{zy}	C_{zz}
1,27	73,2	36,4	-42,4	64,8	88,4	-3,45	-3,31	85,6
0,625	38,4	18,2	-23,4	30,9	48,0	-2,52	-2,44	44,0
0,299	21,9	8,52	-12,5	14,2	26,2	-2,16	-2,12	20,5
0,187	17,1	5,56	-8,56	8,92	19,2	-1,80	-1,77	12,2
0,131	15,3	4,28	-6,88	6,48	16,0	-1,67	-1,67	9,04
0,095	14,8	3,47	-5,68	5,04	13,84	-1,52	-1,50	6,92
0,070	15,8	3,03	-4,72	4,24	12,5	-1,17	-1,29	5,20
0,0516	16,0	2,93	-4,04	3,55	11,8	-0,944	-0,972	4,28
0,0374	17,8	3,03	-3,32	3,10	11,4	-0,688	-0,688	3,56
0,0256	20,8	3,44	-2,41	2,70	11,6	-0,298	-0,288	2,58
0,0204	23,2	3,86	-1,92	2,444	12,0	-0,128	-0,112	2,28

Tabelul 6.8

Coeficienții dinamici adimensionali ai unui lagăr cu patru lobi, $L/D = 0,5$, $m_p = 3/4$

S	Coeficienții de rigiditate				Coeficienții de amortizare			
	K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}	C_{yy}	C_{yz}	C_{zy}	C_{zz}
1,24	64,6	43,9	-44,2	65,0	98,5	-0,068	0,14	98,4
0,614	33,2	22,4	-22,2	32,6	50,7	0,036	0,14	49,3
0,293	18,7	11,8	-11,3	16,5	26,7	0,136	0,192	24,2
0,182	14,7	8,19	-7,33	11,1	19,1	0,0967	0,132	15,3
0,123	13,5	6,32	-5,62	8,52	15,3	0,196	0,224	11,3
0,0853	13,6	5,36	-4,61	6,92	13,6	0,288	0,308	8,89
0,0593	14,6	4,81	-3,53	5,85	12,7	0,236	0,256	6,38
0,04	16,5	4,53	-3,08	5,04	12,5	0,376	0,392	5,32
0,0256	19,8	4,56	-2,62	4,32	13,0	0,492	0,508	4,35
0,0147	25,9	5,14	-1,74	3,61	14,6	0,56	0,58	2,70
0,0103	31,4	5,82	-1,36	3,07	16,4	0,776	0,792	2,28

6.8.5.4 Lagăre multilobate cu trepte de presiune

Performanțele unor lagăre necilindrice, ca cele eliptice, cu semicuzineti decalate sau cu mai mulți lobi, pot fi ameliorate prin încorporarea unor trepte de presiune. În figura 6.36 se prezintă un lagăr cu patru lobi și trepte de presiune.

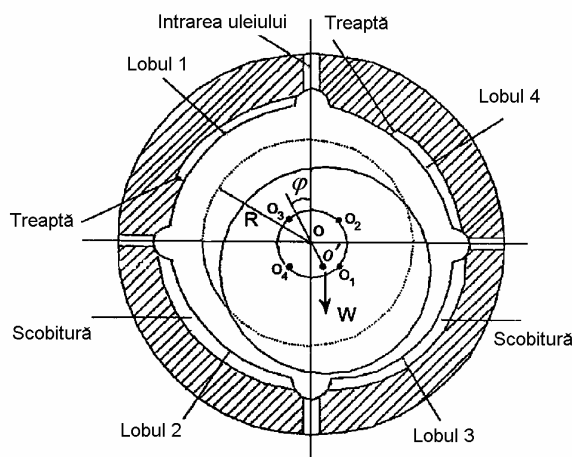


Fig. 6.36 [6.10]

În figurile 6.37 se arată variația circumferențială a presiunilor în filmul de fluid, în planul central al unui lagăr cu patru lobi convențional și al unui lagăr cu trepte de presiune cu patru lobi, pentru două valori extreme ale excentricității relative.

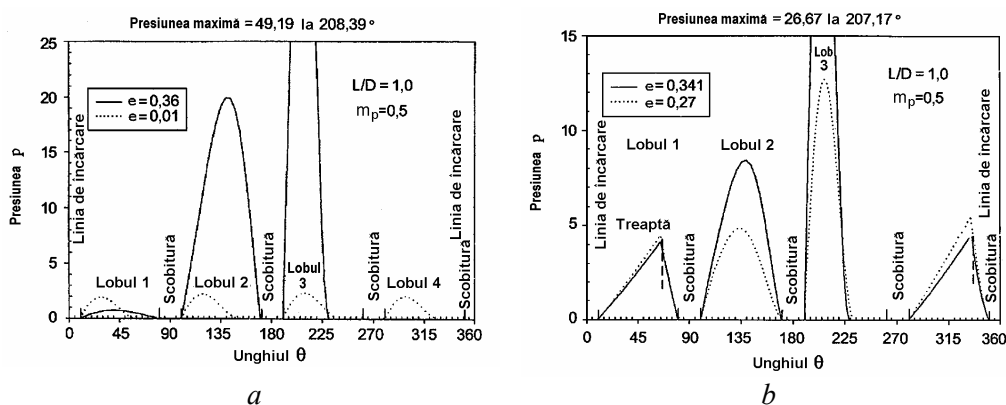


Fig. 6.37 [6.10]

În lagărul cu patru lobi convențional (fig. 6.37, a), lobi 1 și 4 sunt fie cavități pe aproape întreaga suprafață fie au presiuni joase. Prin încorporarea

treptelor de presiune în lobi 1 și 4 (fig. 6.37, *b*), se generează vârfuri de presiune în dreptul treptelor, urmate de scăderi bruște. Aceste presiuni sunt distribuite pe porțiuni mai mari ale suprafeței fusului iar valorile maxime sunt mult mai mari decât cele care apar în lagărele convenționale. În lobi inferiori cu scobituri (canale circumferențiale) se observă o descreștere similară a presiunilor maxime. Generarea presiunilor mari în jumătatea superioară a lagărului îmbunătățește stabilitatea. Distribuția presiunilor pe toată circumferința fusului asigură o funcționare stabilă a lagărului.

6.8.6 Lagăre cu segmenti oscilanți

Lagărul radial cu segmenti oscilanți are mai mulți cuzineți parțiali care pot pivota față de carcasă. El este ca un lagăr multilobat, la care lobi sunt patine pivotante. Lagărele cele mai utilizate au patru sau cinci segmenti pivotanți.

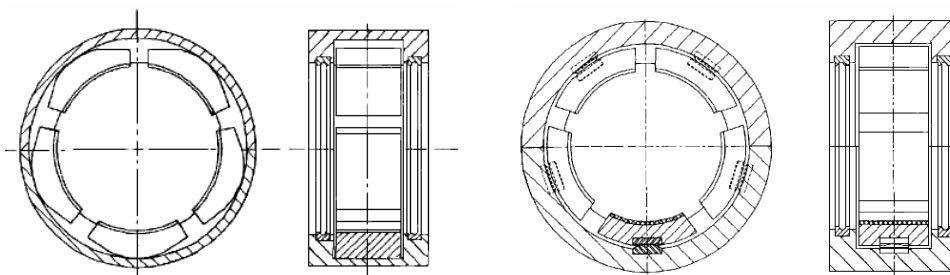


Fig. 6.38

Fig. 6.39

În figura 6.38 se arată lagărul cu *pivoți basculanți*. Aceasta este soluția constructivă cea mai simplă și mai ieftin de prelucrat. Construcția segmentului permite pivotarea doar în direcție circumferențială (nu și axială). Deoarece contactul cu suportul se face teoretic pe o linie, în pivot pot apare tensiuni mari dacă nu se realizează o aliniere corespunzătoare.

Soluția constructivă cu *pivoți sferici* este prezentată în fig. 6.39. Un buton sferic, montat fie pe segment fie pe carcasă, poate pivota pe o plăcuță călită montată pe cealaltă piesă. Aceasta permite bascularea în toate direcțiile.

În varianta cu *suprafață sferică de rezemare* (fig. 6.40), forța pe segment este transmisă carcasei printr-un sistem bilă-suport. Acesta permite segmentului să pivoțeze în mod obișnuit dar poate prelua și dezaxarea arborelui. Pivotul sferic este mai durabil decât pivotul basculant deoarece suprafața de contact a cuplei sferă-suport are o presiune contact specifică mai mică decât linia de contact a pivotului basculant. Alunecarea relativă între sferă și suport ajută la evitarea fretting-ului. La fel ca la lagărele cu geometrie fixă, pe suprafața lagărului se aplică un strat de metal alb antifricțiune (de grosime 50 - 125 μm) pentru protecția arborelui.

Recent, au apărut lagăre cu segmenti elastici (deformabili la încovoiere).

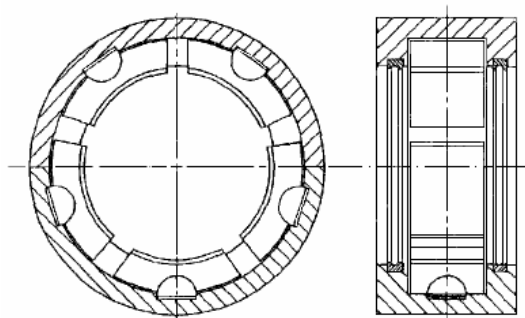


Fig. 6.40

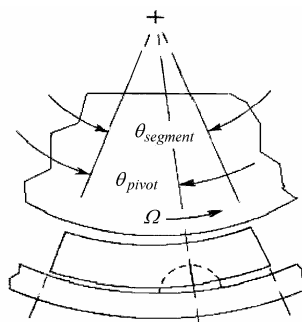


Fig. 6.41

Segmentii oscilanți pot avea axa de oscilație descentrată. O măsură a distanțării pivotului față de mijlocul segmentului (fig. 6.41) este *descentrarea*

$$Descentrarea = \frac{\theta_{pivot}}{\theta_{segment}}. \quad (6.62)$$

O descentrare de 0,5 corespunde unui pivot centrat, montat la mijlocul segmentului. Decalând pivoții în direcția rotației fusului la descentrări mai mari ca 0,5 se poate mări grosimea minimă a filmului de lubrifianț, deci capacitatea portantă. O descentrare uzuală este în jur de 0,6. Utilizarea pivoților descentrați este limitată la rotoare care se rotesc într-un singur sens.

Descentrarea este importantă doar când lagărul este preîncărcat. Preîncărcarea se poate obține prelucrând interiorul segmentelor la un diametru mai mare decât cel corespunzător jocului în lagăr. Factorul de preîncărcare variază între 0 și 0,5, cel mai frecvent în jur de 0,3. Creșterea preîncărcării determină o creștere a rigidității, dar o reducere a amortizării.

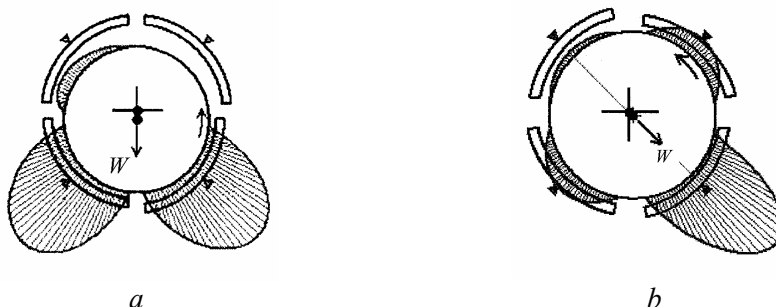


Fig. 6.42 [6.11]

La acest tip de lagăr, fiecare segment pivotează independent, urmărind fusul, și își dezvoltă propria distribuție de presiune. Aceasta reduce rigiditățile transversale de cuplaj. Distribuția presiunii pe circumferința fusului într-un lagăr cu patru segmenti oscilanți rigizi este prezentată în fig. 6.42, *a* pentru o sarcină

verticală și în fig. 6.42, *b* - pentru o sarcină înclinată. Lagărul are $L/D = 0,7622$, $m_p = 0,5$, unghiul segmentului 45^0 și descentrarea 0,5.

În figurile 6.43, *a* și *b* se prezintă variația coeficienților dinamici adimensionali ai unui lagăr cu 4 segmente oscilante cu încărcarea între patine (*load between pads*- LBP) și condiții la limita Reynolds, în funcție de numărul Sommerfeld. Lagărul are $L/D = 0,5$, $m_p = 2/3$, unghiul segmentului 80^0 și descentrarea 0,5. Lagărul este izotrop, cu valori egale ale coeficienților direcți de rigiditate și de amortizare. Lagărul este intrinsec stabil, având coeficienții de rigiditate transversală (de cuplaj) egali cu zero

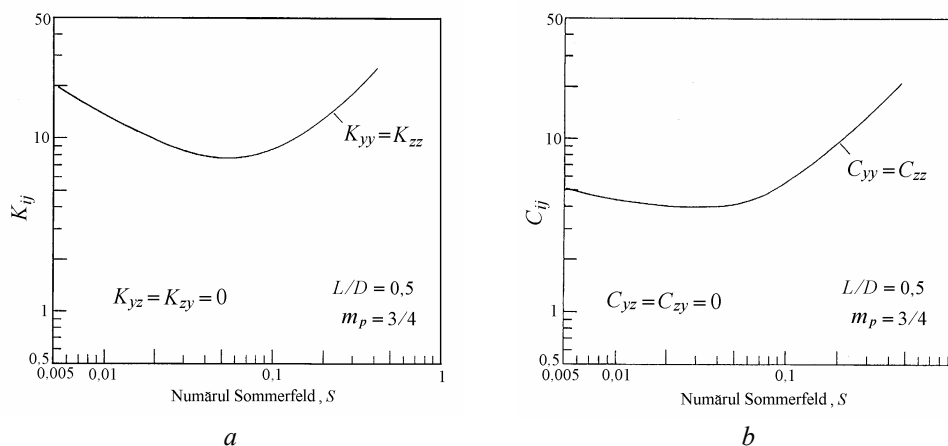


Fig. 6.43 [6.1]

Distribuția presiunii pe fusul unui lagăr cu cinci segmente oscilante este arătată în fig. 6.44. Lagărul are $L/D = 1$, descentrarea 0,5, unghiul pivotului 36^0 și este preîncărcat. Figura 6.44, *a* este pentru un lagăr cu sarcina pe patină (*load on pad* - LOP). Figura 6.44, *b* este pentru același lagăr cu sarcina între patine (*load between pads* - LBP). În ambele cazuri unghiul de atitudine este zero.

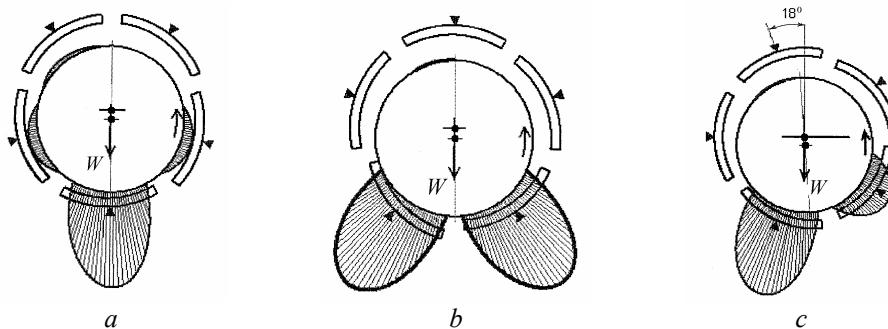


Fig. 6.44 [6.11]

În figura 6.44, c se arată distribuția presiunii când vectorul încărcării este între centrul patinei segmentului și centrul fantei de ulei. În acest caz, deoarece sarcina nu este simetrică față de segmenti, unghiul de atitudine al lagărului nu este zero iar coeficienții de rigiditate și de amortizare transversală nu sunt zero.

În Tabelul 6.9 se dau coeficienții dinamici adimensionali ai unui lagăr cu cinci segmenti oscilanți, cu $L/D=0,5$ și $m_p=3/4$, cu încărcarea între patine și condiții la limită Reynolds, în funcție de numărul Sommerfeld [6.1].

Tabelul 6.9

Coeficienții dinamici ai unui lagăr cu cinci segmenti oscilanți, $L/D=0,5$, $m_p=3/4$, LBP

S	Coeficienții de rigiditate				Coeficienții de amortizare			
	K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}	C_{yy}	C_{yz}	C_{zy}	C_{zz}
16,1	2010	0	0	2010	1230	0	0	1230
6,42	803	0	0	803	490	0	0	490
3,21	401	0	0	401	245	0	0	245
1,57	196	0	0	196	120	0	0	120
0,515	66,1	0	0	65,2	40,2	0	0	39,8
0,243	32,8	0	0	31,6	19,7	0	0	19,2
0,120	18,3	0	0	16,5	10,5	0	0	9,85
0,0763	14,5	0	0	11,7	7,76	0	0	6,72
0,0484	12,9	0	0	9,18	6,33	0	0	4,93
0,0356	12,7	0	0	8,31	5,82	0	0	4,17
0,0264	13,0	0	0	7,95	5,59	0	0	3,72
0,0187	13,8	0	0	8,00	5,60	0	0	3,48
0,0128	15,7	0	0	8,78	5,80	0	0	3,41

Configurația cu sarcina între patine (LBP) este utilizată atunci când proprietățile cele mai importante sunt capacitatea de încărcare mare și răspunsul sincron redus. În acest caz, amortizarea suprafeței efective de rezemare este mai mare decât în cazul lagărelor cu sarcina pe patină (LOP). Rotoarele grele cu turații relativ mici (numere Sommerfeld mici) au lagăre cu segmenti oscilanți LBP.

Rotoarele ușoare cu turații relativ mari au de obicei lagăre cu segmenti oscilanți LOP. Configurația LOP realizează o rezemare asimetrică, care mărește stabilitatea rotorului, aceasta fiind caracteristica cea mai importantă a acestui tip de lagăr.

Coeficienții de rigiditate și de amortizare adimensionali pentru un lagăr cu cinci segmenti oscilanți de 60^0 , cu pivoți centrați, $L/D=0,5$, $L/B=0,955$ (unde B este lungimea arcului segmentului), fără preîncărcare și neglijând inerția

segmentului, sunt prezentați în funcție de numărul Sommerfeld în fig. 6.45, *a* pentru un lagăr LBP și în fig. 6.45, *b* pentru un lagăr LOP.

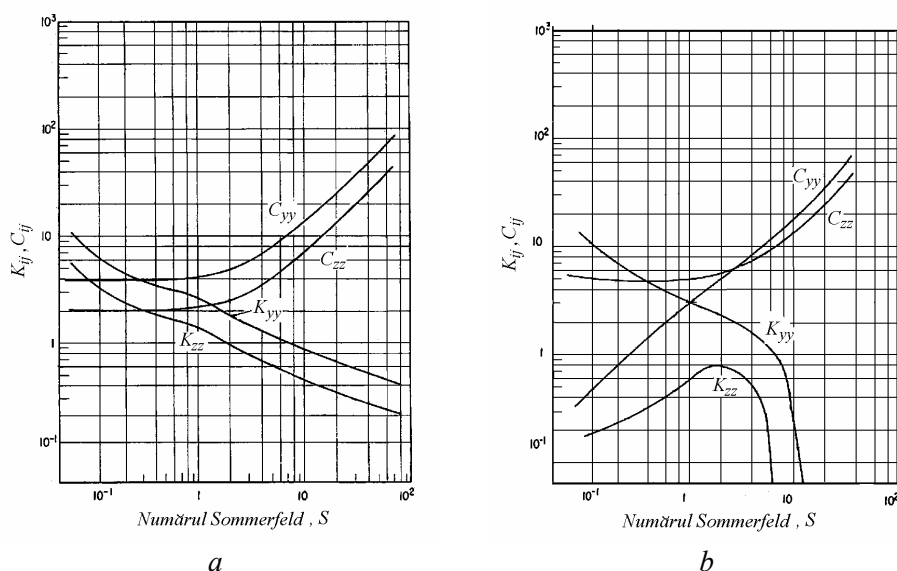


Fig. 6.45 [6.12]

La lagărul LOP, se observă o descreștere bruscă a valorii coeficienților K_{yy} și K_{zz} în vecinătatea condiției de rezonanță a patinelor. Aceasta nu implică o pierdere a rigidității generale a lagărului, deoarece la rezonanță inerția segmentelor nu poate fi neglijată, termenii de cuplaj transversal devin importanți și înlocuiesc rigiditățile directe. Totuși, în acest caz lagărul își pierde stabilitatea intrinsecă. Rezonanța segmentelor apare de obicei la numere Sommerfeld mari, la care grosimea minimă a filmului de lubrifianț este mare și amortizarea este puternică.

6.8.7 Lagăre cu treaptă Rayleigh

Lagărul cu treaptă Rayleigh este considerat a fi lagărul cu cea mai mare capacitate portantă dintre toate geometriile posibile. El se bazează pe o observație făcută de Lord Rayleigh în 1918, conform căreia, dacă se neglijează debitul de scăpări (lagăr infinit lung), forma convergentă în treaptă a filmului de lubrifianț are cea mai mare capacitate portantă într-un lagăr cu alunecare lubrifiat cu un fluid incompresibil.

În figura 6.46, *a* se arată fusul într-o poziție concentrică. În acest caz, pentru a obține o capacitate portantă diferită de zero, numărul treptelor dispuse în jurul lagărului trebuie limitat la una singură. Parametrii principali sunt C_r - jocul radial în zona înălțată (creasta), C_s - jocul radial în zona adâncită (degajarea), β -

unghiul subîntins de zona adâncită, γ - unghiul subîntins de zona înălțată și δ - unghiul subîntins de fanta de ungere.

În figura 6.46, *b* se arată un lagăr cu trei trepte Rayleigh având fusul într-o poziție excentrică definită de unghiul de atitudine Φ și unghiul de orientare al excentricității Γ . Un segment este definit prin porțiunea din lagăr care include unghiurile subîntinse de creastă, degajare și fanta de ungere. Fiecare segment lucrează independent, deoarece în dreptul fantelor de alimentare cu ulei presiunea se reduce la cea atmosferică. În figura 6.46, *c* se prezintă schematic geometria unui lagăr cu patru trepte Rayleigh.

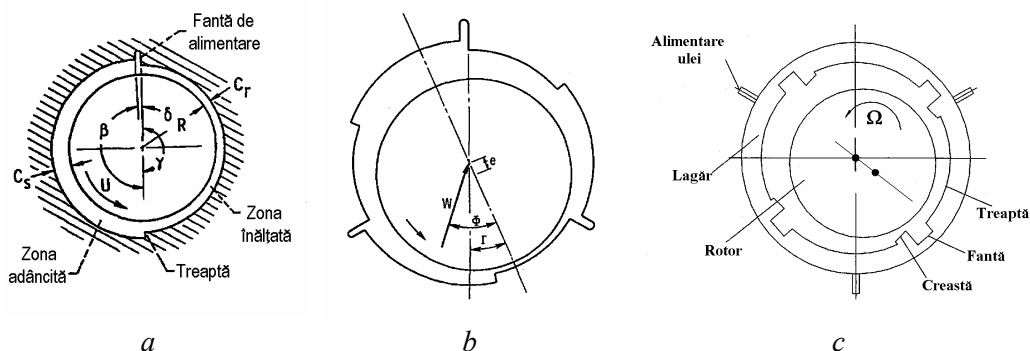


Fig. 6.46 [6.13]

Într-un lagăr radial cu o singură treaptă Rayleigh, în jurul fusului se dezvoltă o presiune pozitivă. Distribuția presiunii este triunghiulară pentru un raport rază/lungime egal cu zero, cu valoarea maximă în dreptul pragului, existând o configurație optimă a treptei pentru obținerea unei capacități portante maxime. Scăpările laterale sunt de obicei mai mari decât la alte lagăre. Pentru limitarea curgerii axiale și creșterea capacității portante, la capetele lagărului se prevăd limitatoare laterale. Date privind caracteristicile dinamice ale lagărelor radiale cu trepte Rayleigh cu fluid incompresibil sunt încă insuficient publicate.

6.8.8 Lagăre cu bușă flotantă (inel intermediar)

Lagărul cu bușă flotantă are aplicații la turbosuflante, care au un rotor ușor care se rotește la turații foarte mari. Acesta este un lagăr circular cu cuzinet complet care are un inel intermediar (uneori găurit) care se poate mișca liber în spațiul dintre fus și cuzinet (fig. 6.47). Lagărul are deci două filme de lubrifiant, unul interior, între fus și bușă flotantă, și unul exterior, între bușă flotantă și cuzinet. Fiecare film poate fi considerat ca un lagăr radial cu cuzinet complet.

Filmul de ulei exterior produce amortizare, utilă în îmbunătățirea stabilității rotorului care se rotește în filmul interior.

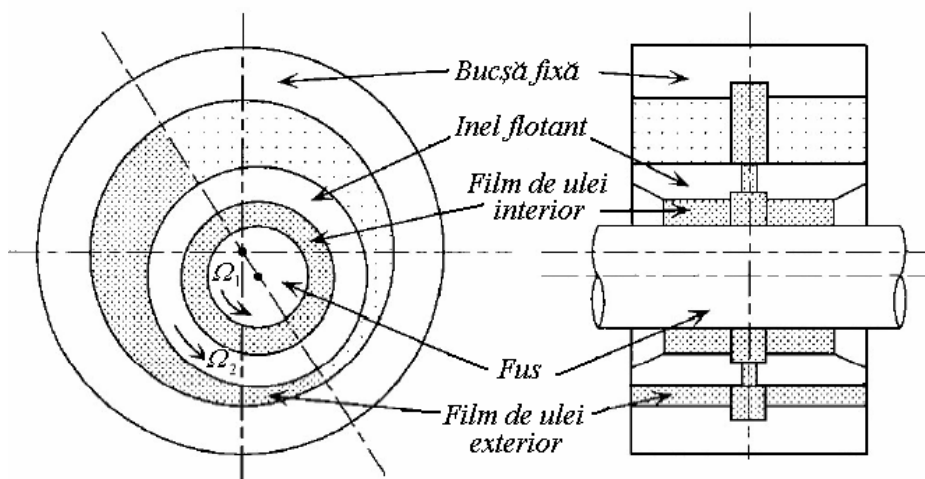


Fig. 6.47

Rotoarele turbosuflantelor de supraalimentare ale motoarelor cu ardere internă au vibrații subarmonice puternice care produc zgomot (uruit) și frecări între rotor și stator. Studiul acestora face obiectul eforturilor actuale de cercetare.

6.9 Amortizoare cu film expulzat (*squeeze film*)

Amortizoarele cu film expulzat (strivit, extrudat) sunt utilizate pentru îmbunătățirea răspunsului dinamic al rotoarelor. Amortizarea permite atât stabilizarea rotoarelor cât și reducerea amplitudinii precesiei sincrone a acestora la trecerea prin turațiile critice. Ele reprezintă un tip aparte de lagăr radial hidrodinamic care are turația zero și în care forțele de presiune hidrodinamice sunt produse de expulzarea lubrifianțului dintre fus și cuzinet.

6.9.1 Principiul de bază

Amortizoarele cu film expulzat (*squeeze-film dampers* - SFD) sunt elemente neliniare utilizate în mașini rotative cu turații mari pentru atenuarea vibrațiilor și a forțelor transmise. Fusul unui SFD constă dintr-un inel fixat rigid pe inelul exterior al unui rulment (sau bucșa unui lagăr cu alunecare). Amortizorul SFD propriu-zis este un film de ulei care umple interstițiul inelar dintre fusul și

carcasa unui lagăr. Rotirea “fusului” este împiedicată printr-un sistem de blocare, dar acesta poate avea o mișcare de precesie în interiorul interstițiului.

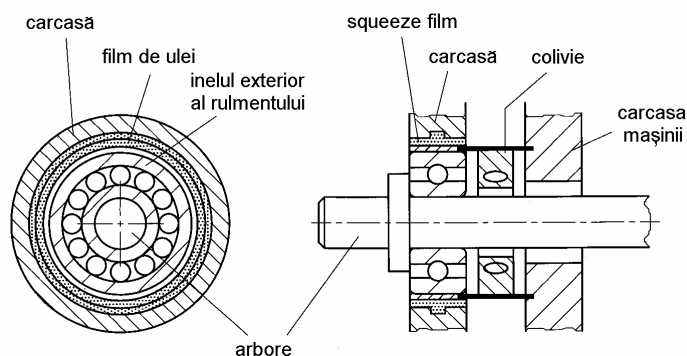


Fig. 6.48 [6.14]

Un SFD poate fi utilizat și separat, între un lagăr și carcasa acestuia, pentru a reduce vibrațiile rotorului la trecerea prin turațiile critice. În acest caz, rotirea elementului interior al SFD este blocată prin știfturi antirotație. Amortizorul devine o parte componentă a unei structuri cu componente în serie, formată din rotor, amortizor și elasticitatea carcasei.

Spre deosebire de lagărele radiale hidrodinamice, un SFD este inerent stabil, adică nu poate produce vibrații autoexcitate. Totuși, în cazul excitației prin dezechilibru masic, vibrațiile forțate periodice ale unui sistem rotoric amortizat cu film expulzat pot deveni instabile, rezultând fie fenomene de salt al amplitudinii, fie vibrații cu componente nedorite, cu frecvențe nesincrone care nu sunt multipli întregi ai frecvenței corespunzătoare turației.

În aplicațiile practice, un SFD poate fi utilizat cu sau fără un inel elastic de fixare montat în paralel (fig. 6.48). Arcurile de reținere contribuie la atenuarea efectelor neliniare, și în primul rând la centrarea fusului în carcasă. Amortizorul SFD constă dintr-un interstițiu inelar cu ulei, de 25 - 500 μm , creat în jurul inelului exterior al unui rulment. Colivia împiedică rulmentul să se rotească și centrează rulmentul în interstițiul amortizorului.

Alte soluții constructive de amortizoare cu film expulzat nu au colivie, ci doar un inel de reținere sau un mecanism de blocare care împiedică rotirea inelului exterior al rulmentului. La aceste amortizoare, dacă nu există o mișcare de precesie, fusul rămâne în poziția inferioară a interstițiului.

Principala caracteristică a amortizoarelor cu film expulzat (strivit) o reprezintă filmul de ulei staționar. Aceasta este de fapt singura diferență dintre un amortizor cu expulzare de film și un lagăr radial autoportant, ambele fiind lagăre hidrodinamice. În lagărele radiale filmul de ulei se rotește chiar în absența mișcării de precesie. Uleiul în rotație crează portanța statică a lagărului radial și contribuie

la rigiditatea acestuia. Dar rotația uleiului în jurul fusului poate produce mișcări instabile, cum sunt cele de tip *oil whirl* și *oil whip*.

În contrast, în amortizoarele cu film expulzat uleiul nu se rotește dacă rotorul nu are o mișcare de precesie. Rezultă că aceste amortizoare nu au portanță statică și nici rigiditate statică. Filmul de ulei amortizează mișcarea doar când rotorul are o mișcare de precesie. Dacă nu există mișcare de precesie (și nici element elastic de reținere) fusul coboară în poziția inferioară într-un SFD. Deoarece uleiul nu este în mișcare, în amortizoarele cu film expulzat instabilitățile de tip *oil whirl* și *oil whip* nu apar.

6.9.2 Soluții constructive de amortizoare cu *squeeze film*

În figura 6.49, *a* se arată un amortizor etanșat local, având la capete orificii de alimentare/drenare și inele radiale de tip segmenti de piston. În acest tip de amortizor, etanșat în direcție axială, uleiul curge în direcție circumferențială când este strivit.

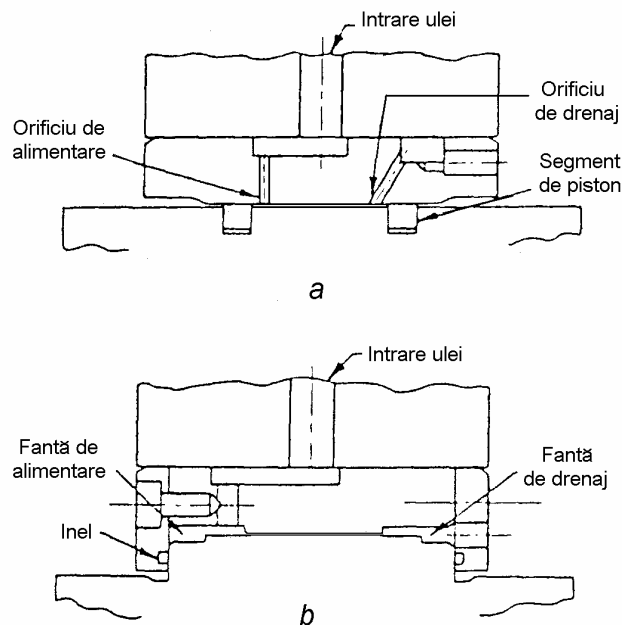


Fig. 6.49 [6.15]

În figura 6.49, *b* se arată un amortizor deschis la capete, denumit uneori amortizor etanșat global. Acesta are fante de alimentare/drenaj la capete și etanșări frontale axiale. Deoarece amortizorul nu este etanșat în direcție axială, uleiul expulzat curge axial.

Un alt mod de alimentare cu ulei este printr-o fantă centrală circumferențială; acesta este utilizat la amortizoare fără etanșări la capete.

Alte tipuri de amortizoare cu film expulzat sunt utilizate la lagărele cu rulmenți, unde elementul elastic de centrare este eliminat, dar se folosesc știfturi anti-rotatie. Sistemele de etanșare includ: a) etanșări radiale cu inele O; b) etanșări cu segmenti de piston, și c) etanșări laterale cu inele O.

6.9.3 Coeficienții de rigiditate și de amortizare ai filmului expulzat

Coeficientul de rigiditate K_{sf} și coeficientul de amortizare C_{sf} ai unui SFD se pot calcula prin rezolvarea ecuației Reynolds pentru un lagăr radial nerotitor.

La un SFD fără scurgeri laterale (fig. 6.49, a), presupunând curgere laminară, cavitație totală, precesie sincronă circulară și neglijând inerția filmului de lubrifiant, coeficienții de rigiditate și de amortizare au expresiile [6.16]

$$K_{sf} = \frac{24 \mu R^3 L \varepsilon \omega}{C_r^3 (2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}, \quad (6.63)$$

$$C_{sf} = \frac{12 \pi \mu R^3 L}{C_r^3 (2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}, \quad (6.64)$$

unde R – raza filmului expulzat, L – lungimea axială a amortizorului, C_r - jocul radial, μ - vâscozitatea dinamică a uleiului, ε - excentricitatea adimensională (raza orbitei de precesie / jocul radial), ω - viteza unghiulară a precesiei.

La amortizoare relativ scurte ($L/D < 0,5$) deschise la capete, presupunând scurgeri libere la capete (fig. 6.49, b), coeficientul de rigiditate este

$$K_{sf} = \frac{2 \mu R L^3 \varepsilon \omega}{C_r^3 (1 - \varepsilon^2)^2} \quad (6.65)$$

iar coeficientul de amortizare este

$$C_{sf} = \frac{\pi \mu R L^3}{2 C_r^3 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (6.66)$$

În cazul filmului de lubrifiant necavitat, $K_{sf} = 0$ și

$$C_{sf} = \frac{\pi \mu R L^3}{C_r^3 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}} . \quad (6.67)$$

În cazul mișcării de strivire pur radială, $K_{sf} = 0$ și pentru film cavitat

$$C_{sf} = \frac{\mu R L^3 \left[\pi - \cos^{-1}(\varepsilon) \right] (2\varepsilon^2 + 1)}{C_r^3 (1 - \varepsilon^2)^{5/2}} , \quad (6.68)$$

iar pentru film necavitat

$$C_{sf} = \frac{\pi \mu R L^3 (2\varepsilon^2 + 1)}{C_r^3 (1 - \varepsilon^2)^{5/2}} . \quad (6.69)$$

Expresiile de mai sus sunt valabile în cazul unei orbite de precesie de rază $C_r \varepsilon$. Amortizoarele nu au o poziție de echilibru static când sunt încărcate, ca la un lagăr radial. “Rigiditatea” unui amortizor rezultă din mișcarea orbitală produsă de o sarcină rotitoare și poate fi definită mai corect ca fiind un coeficient de amortizare transversală.

La amortizoare care funcționează la turații mari și la valori mari ale numărului Reynolds al filmului fluid

$$\text{Re} = \frac{\rho \omega C_r^2}{\mu} , \quad (6.70)$$

unde ρ densitatea lubrifianțului, forțele de inerție din fluid devin importante. Coeficienții de inerție sau ‘masele adiționale’ se pot obține împărțind forțele de inerție ale fluidului la accelerația radială $\omega^2 C_r \varepsilon$. Coeficientul masic direct este

$$M_{sf} = -\frac{\pi \rho R L^3}{12 C_r} \frac{\beta - 1}{\beta \varepsilon^2} (2\beta - 1), \quad (6.71)$$

iar coeficientul masic de cuplaj transversal este

$$m_{sf} = -\frac{\rho R L^3}{C_r} \left(\frac{27}{70\varepsilon} \right) \left(2 + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right), \quad (6.72)$$

unde

$$\beta = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} . \quad (6.73)$$

6.9.4 Proiectarea unui amortizor cu *squeeze film*

Pentru soluționarea unei probleme de vibrații subsincrone la un compresor existent, prin includerea un SFD, se face o analiză a stabilității bazată pe un model al sistemului rotor-lagăre cu elemente finite sau cu matrici de transfer.

Parametrii de intrare sunt raza R și lungimea L ale amortizorului, vâscozitatea dinamică a uleiului, μ , și viteza unghiulară de rotație, Ω . De obicei se mai consideră o rigiditate transversală de cuplaj aerodinamic, a cărei valoare maximă se estimează la $1,75 \cdot 10^7$ N/m [6.16]. Parametrii de ieșire sunt jocul radial, C_r și excentricitatea relativă, ε_0 , care determină valorile coeficienților de rigiditate și de amortizare ai SFD capabil să elimine instabilitatea.

Cu ajutorul unui program de calculator se rezolvă problema de valori proprii complexe și se calculează decrementul logaritmic (sau numai partea reală a valorilor proprii) în funcție de parametrii de proiectare.

În fig. 6.50 se arată o diagramă de stabilitate tipică, în care s-a reprezentat grafic variația părții reale a valorii proprii a modului instabil în funcție de amortizarea SFD, la o anumită turație. Fiecare curbă corespunde unei valori date a rigidității amortizorului. Se trasează mai multe diagrame pentru câteva valori ale rigidității transversale de cuplaj aerodinamic. Caracteristicile rotorului și lagărelor rămân neschimbate.

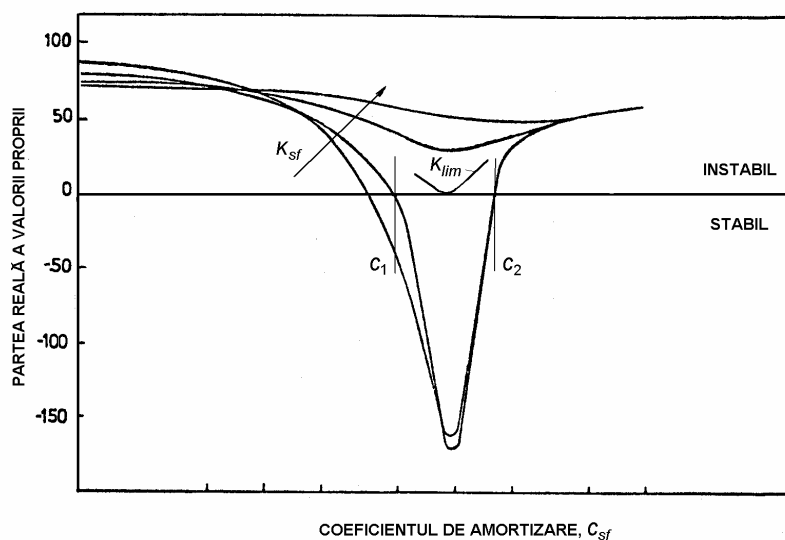


Fig. 6.50 [6.16]

Curbele care intersectează nivelul zero al părții reale a valorii proprii definesc rigiditățile pentru care sistemul poate fi stabil. Pe măsură ce rigiditatea

amortizorului SFD crește, sistemul devine mai puțin stabil. Există o valoare limită K_{lim} peste care sistemul este totdeauna stabil (curbele nu intersectează linia de valoare zero a părții reale a valorii proprii).

Pe de altă parte, pentru curbele care intersectează axa orizontală de nivel zero, există un domeniu de valori intermediare ale amortizării SFD în care sistemul este stabil pentru o valoare dată a rigidității amortizorului. Pentru o amortizare sub o anumită valoare, C_1 , sau peste o altă valoare, C_2 , definite de punctele de intersecție, sistemul este din nou stabil, astfel că valoarea reală a amortizării SFD trebuie aleasă între cele două limite.

Diagramele de stabilitate liniarizate, ca cea din figura 6.50, oferă informații asupra caracteristicilor amortizorului cu film expulzat necesare pentru a conferi stabilitate unui sistem rotor-lagăre dat.

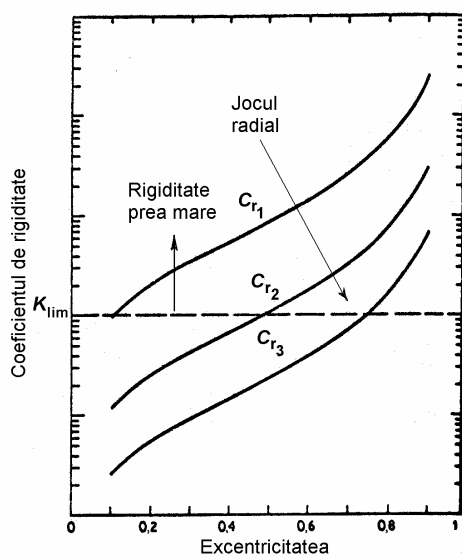


Fig. 6.51 [6.16]

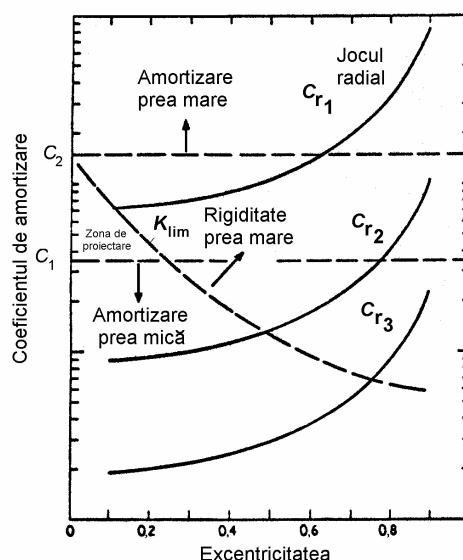


Fig. 6.52 [6.16]

Pentru a determina parametrii de proiectare ai amortizorului mai sunt necesare două diagrame care prezintă variația rigidității (fig. 6.51) și amortizării (fig. 6.52) amortizorului, în funcție de excentricitate, pentru diferite valori ale jocului radial.

Întâi este utilizată diagrama din fig. 6.51. Trasând o linie orizontală de ordonată K_{lim} , se determină valori ε_0 în punctele de intersecție cu curbele $C_r = \text{const.}$

Pe baza acestor valori, se trasează curba $K_{lim} = \text{const.}$ în fig. 6.52, care marchează limita superioară a domeniului cu funcționare stabilă posibilă. Apoi, în

fig. 6.52 se desenează două linii orizontale de ordonate C_1 și C_2 , limitele de variație a amortizării SFD pentru funcționare stabilă. Suprafața dintre aceste două limite situată sub curba K_{lim} definește regiunea de proiectare a amortizorului. Parametrii de proiectare C_r și ε_0 se aleg să corespundă punctelor din această regiune.

6.10 Etanșări inelare cu lichid

Etanșările inelare cilindrice sunt cuple de rotație în care cilindrul interior (rotorul) se rotește într-un interstițiu de fluid inelar față de cilindrul exterior (statorul). Într-o etanșare centrată, fluidul are atât o viteză axială, datorită diferenței axiale de presiune, cât și o viteză circumferențială, datorită rotirii arborelui și frecării între arbore și fluid. În modelul curgerii volumice ("bulk-flow") [6.17], aceste viteze sunt considerate constante pe grosimea filmului iar tensiunile de forfecare sunt luate în considerare doar la nivelul arborelui și statorului.

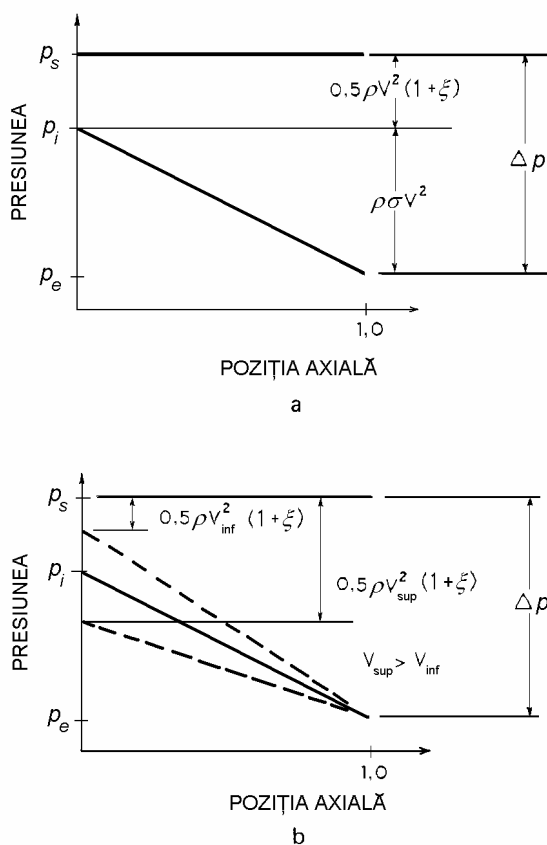


Fig. 6.53 [6.18]

Într-o etanșare excentrică, diferența între căderea de presiune în porțiunea mai largă și porțiunea mai îngustă produce o forță de readucere care se opune deplasării arborelui, producând o rigiditate directă de valoare relativ mare. Acesta este *efectul Lomakin*.

Asupra unui arbore în precesie cilindrică, acționează o forță tangențială, perpendiculară pe deplasarea radială a arborelui, care produce o rigiditate transversală de cuplaj. La etanșările “scurte”, se neglijează viteza circumferențială produsă de căderea de presiune. O soluție îmbunătățită ține cont de dezvoltarea curgerii circumferențiale datorită forțelor de forfecare în lungul etanșării.

În continuare, se prezintă soluțiile pentru etanșări scurte propuse de Black și Childs.

6.10.1 Reacțiunea hidrostatică. Efectul Lomakin

În fig. 6.53, *a* se prezintă distribuția axială a presiunii într-un punct oarecare de pe circumferința unei etanșări cu suprafețe netede, în cazul când arborele nu se rotește. În fig. 6.53, *b* se arată căderile de presiune la intrare.

În secțiunea de intrare, o parte din presiunea totală p_s din amonte se transformă în presiune dinamică. Fluidul este contractat brusc și accelerat în interstițiul etanșării. Presiunea statică scade brusc la valoarea p_i datorită efectului Bernoulli și datorită dezvoltării progresive a unui câmp de viteze de curgere turbulentă. Restul căderii de presiune în etanșare este aproape liniar. La ieșire presiunea este p_e .

Scăderea presiunii în etanșare se poate calcula cu relația lui Yamada [6.19] pentru curgeri între cilindri concentrici în rotație

$$\Delta p = (1 + \xi + 2\sigma) \frac{\rho V^2}{2}, \quad (6.74)$$

unde ξ este coeficientul de pierderi la intrare, ρ este densitatea fluidului, V este viteza medie a fluidului și σ este coeficientul de pierderi prin frecări

$$\sigma = \frac{\lambda L}{C_r}. \quad (6.75)$$

În expresia (6.75), L este lungimea etanșării, C_r este jocul radial iar λ este un coeficient de frecare definit de Yamada în funcție de numărul Reynolds axial, R_a și numărul Reynolds circumferențial, R_c :

$$\lambda = 0,079 R_a^{-\frac{1}{4}} \left[1 + \left(\frac{7R_c}{8R_a} \right)^2 \right]^{\frac{3}{8}}, \quad (6.76, a)$$

$$R_a = \frac{2V C_r}{\nu}, \quad R_c = \frac{R \Omega C_r}{\nu}, \quad (6.76, b)$$

unde ν este vâscozitatea cinematică a fluidului, R este raza etanșării și Ω este viteza unghiulară a rotorului, rad/s. Legea de frecare (6.75) este similară ecuației lui Blasius pentru frecarea la curgerea prin țevi [6.17].

Dacă arborele se deplasează în jos, în partea de sus a etanșării viteza V_{sup} crește, datorită interstițiului mai mare. În partea de jos a etanșării viteza V_{inf} scade, datorită interstițiului mai mic. La intrarea în etanșare, căderile de presiune depind de viteza fluidului, fiind diferite în partea superioară și inferioară ale arborelui, așa cum se arată în fig. 6.53, *b*. În partea de sus, căderea de presiune la intrare crește. În partea de jos, căderea presiunii la intrare scade. Creșterea netă a presiunii în partea de jos a etanșării produce o forță dirijată de jos în sus care tinde să readucă arborele în poziția inițială centrată. Aceasta echivalează cu o rigiditate directă. O situație similară apare atunci când variază viteza laterală a arborelui.

Rigiditățile directe mari ale etanșărilor inelare sunt determinate de efectul combinat al scăderii presiunii la intrare și în lungul etanșării. Mecanismul fizic al producerii rigidității directe a fost explicat prima dată de Lomakin (1958).

Distribuțiile de presiune arătate în figurile 6.53, *a* și *b* sunt modificate de rotirea arborelui și variația geometriei etanșării, dar principiile de bază care stau la baza generării presiunii prin contracția bruscă a filmului și accelerarea fluidului în interstițiul etanșării rămân aceleași.

La etanșări, raportul C_r/R este de ordinul 0,003 față de 0,001 la lagăre. Jocurile mărite împreună cu scăderea mare a presiunii în lungul etanșării determină caracterul puternic turbulent al curgerii.

Analizele clasice ale etanșărilor pompelor centrifuge s-au bazat pe modelul curgerii volumice "bulk-flow". În aceste modele se neglijează variația componentelor vitezei fluidului pe grosimea jocului din etanșare. Se lucrează cu valori medii (pe grosimea interstițiului) ale componentelor vitezei – de unde denumirea *bulk-flow* (flux global). Modelele bulk-flow consideră tensiuni de forfecare doar pe suprafețele laterale și neglijează variația acestora pe grosimea jocului [6.14]. Analizele moderne se bazează pe simulări numerice utilizând programe CFD (Computational Fluid Dynamics).

6.10.2 Coeficienții dinamici ai unei etanșări inelare cu lichid

Componentele forței dinamice dintr-o etanșare se exprimă sub forma [6.17]

$$\begin{Bmatrix} -F_y \\ -F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + M \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}, \quad (6.77)$$

unde y și z sunt componentele deplasării în coordonate fixe iar punctul deasupra literei reprezintă derivarea în raport cu timpul. Acest model este valabil pentru deplasări mici în jurul poziției centrate.

Etanșările inelare scurte se consideră izotrope. Termenii diagonali ai matricilor de rigiditate și de amortizare sunt respectiv egali, în timp ce termenii nedijagonalii sunt egali și de semn contrar. Coeficienții de amortizare transversală de cuplaj și termenul masic sunt produși de efecte inerțiale. Soluțiile pentru etanșări scurte se obțin neglijând curgerea circumferențială produsă de diferența de presiune, dar incluzând curgerea produsă de forfecare.

Rigiditățile transversale de cuplaj provin din rotația fluidului, la fel ca în cazul lagărelor radiale cu cuzinet complet necavitate (film complet). De exemplu, dacă într-o etanșare rotorul este deplasat spre dreapta, se crează o secțiune convergentă în jumătatea inferioară și o secțiune divergentă în jumătatea superioară a etanșării (dacă arborele se rotește în sens antiorar). În porțiunea convergentă presiunea crește iar în porțiunea divergentă scade, producând o forță de reacțiune dirijată în sus. Această forță acționează perpendicular pe deplasarea radială având un efect destabilizator.

La etanșările cu interstițiu inelar lung, de tipul celor utilizate în pompele centrifuge multietajate, se utilizează și coeficienți dinamici unghiulari, deoarece în etanșări asupra rotorului acționează și momente (cupluri), forțele produc deplasări unghiulare (rotiri) și momentele produc și deplasări liniare.

Coeficienții dinamici din relația (6.77) au următoarele expresii:

Coeficienții de rigiditate:

$$K = \mu_3 \left(\mu_0 - \mu_2 \Omega^2 T^2 / 4 \right), \quad k = \mu_3 \mu_1 \Omega T / 2; \quad (6.78)$$

Coeficienții de amortizare:

$$C = \mu_3 \mu_1 T, \quad c = \mu_3 \mu_2 \Omega T^2; \quad (6.79)$$

Coeficientul masic:

$$M = \mu_3 \mu_2 T^2 \quad (6.80)$$

unde

$$\mu_3 = \frac{\pi R \Delta p}{\lambda} \quad (6.81)$$

iar timpul mediu de parcurgere a etanșării este

$$T = \frac{L}{V}. \quad (6.82)$$

Coeficienții μ_0 , μ_1 și μ_2 depind de coeficientul de pierderi prin frecare, σ și de coeficientul de pierderi la intrare, ξ . Expresiile acestora sunt date în continuare pentru trei modele de etanșări inelare.

1. Modelul lui Black [6.18], [6.20]

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{(1+\xi)\sigma^2}{(1+\xi+2\sigma)^2}, \\ \mu_1 &= \frac{(1+\xi)^2\sigma + (1+\xi)(2,33+2\xi)\sigma^2 + 3,33(1+\xi)\sigma^3 + 1,33\sigma^4}{(1+\xi+2\sigma)^3}, \\ \mu_2 &= \frac{0,33(1+\xi)^2(2\xi-1)\sigma + (1+\xi)(1+2\xi)\sigma^2 + 2(1+\xi)\sigma^3 + 1,33\sigma^4}{(1+\xi+2\sigma)^4}.\end{aligned}\quad (6.83)$$

La etanșările de lungime finită, pentru a ține cont de valorile finite ale raportului L/R , Jensen a stabilit următoarele formule:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_0 &= \mu_0 \left[1 + 0,28 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right]^{-1}, & \bar{\mu}_1 &= \mu_1 \left[1 + 0,23 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \bar{\mu}_2 &= \mu_2 \left[1 + 0,06 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right]^{-1},\end{aligned}$$

în care coeficienții μ_0 , μ_1 și μ_2 au expresiile (6.83), iar cei cu "bară" deasupra literei trebuie utilizați în relațiile (6.78) - (6.80) în locul celor fără bară.

2. Modelul lui Jensen [6.21]

Într-o dezvoltare ulterioară, coeficienții μ_0 , μ_1 și μ_2 au fost definiți în funcție de parametrul

$$\beta = \left(\frac{7R_c}{8R_a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{7R_c}{8R_a} \right)^2 \right]^{-1} \quad (6.84)$$

care ține cont de variația circumferențială a coeficientului de frecare λ (6.76, a) datorită unei perturbații prin deplasare radială față de poziția centrată. Coeficienții modificați au expresiile

$$\mu_0 = \frac{1,25 A \sigma^2}{B D},$$

$$\mu_1 = \frac{\sigma A^2 + 2A \left[C \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3} \xi \right) - \frac{5}{8} \right] \sigma^2 + \frac{5}{6} E + \frac{1}{6} F}{B D^2}, \quad (6.85)$$

$$\mu_2 = \frac{2A \left(\frac{1}{3} \xi - \frac{1}{6} \right) \sigma + A (1,25 + C \xi) \sigma^2 + \frac{1}{2} E + \frac{1}{6} F}{B D^3},$$

în care

$$\begin{aligned} A &= 1 + \xi, & B &= 1 + \xi + 2\sigma, & C &= 1,75 - 0,75 \beta, \\ D &= A + C \sigma, & E &= A C^2 \sigma^3, & F &= C^3 \sigma^4. \end{aligned}$$

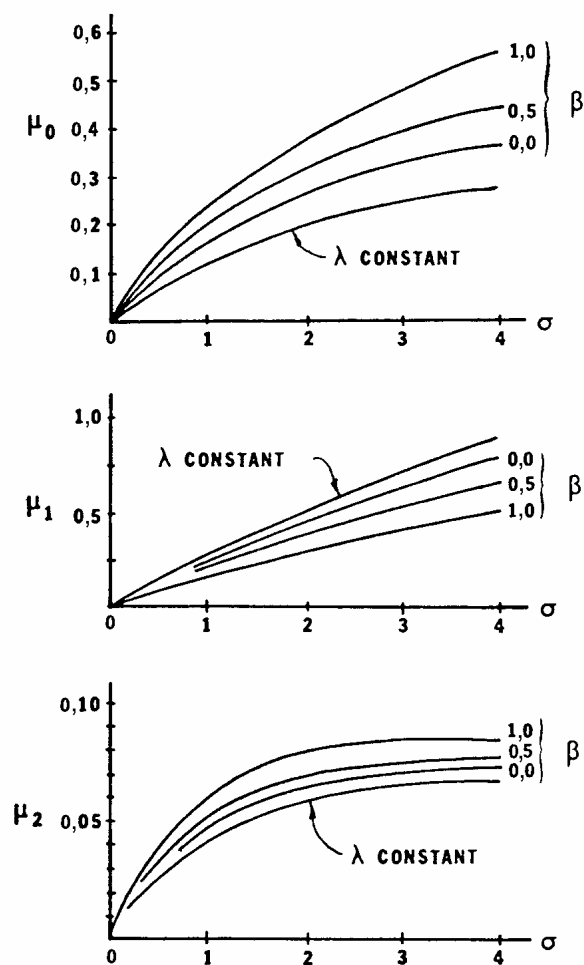


Fig. 6.54 [6.21]

În fig. 6.54 se dau diagramele de variație ale coeficienților μ_0 , μ_1 și μ_2 din relațiile (6.85) în funcție de β și σ , pentru $\xi = 0,5$. Aceștia sunt comparativ insensibili la variațiile coeficientului de pierderi la intrare ξ .

Black a examinat influența componenteii circumferențiale a vitezei fluidului la intrare asupra coeficienților etanșărilor. În analizele anterioare s-a presupus că un element de fluid odată intrat în etanșare atinge instantaneu viteza circumferențială corespunzătoare semiturației $R\Omega/2$. Într-un articol ulterior el a demonstrat că un element de fluid trebuie să parcurgă o distanță axială determinată în lungul etanșării înainte ca viteza sa să tindă asimptotic spre această valoare. Consecința practică a existenței vitezei circumferențiale este scăderea valorilor termenilor de cuplaj, k și c . Aceasta apare în special la etanșările dintre treptele pompelor, în care viteza circumferențială la intrare este neglijabilă.

3. Modelul lui Childs [6.22]

Childs a făcut o analiză a etanșărilor bazată pe modelul lubrificației turbulente propus de Hirs [6.23]. El a considerat că atât în direcție circumferențială cât și axială curgerea turbulentă este complet dezvoltată. Coeficienții dinamici ai etanșărilor scurte stabiliți de Childs au expresiile (6.78)-(6.80), în care coeficienții μ_0 , μ_1 și μ_2 au expresiile

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{2\sigma^2 E(1-m_0)}{1+\xi+2\sigma}, \\ \mu_1 &= \frac{2\sigma^2}{1+\xi+2\sigma} \left[\frac{E}{\sigma} + \frac{B}{2} \left(\frac{1}{6} + E \right) \right], \\ \mu_2 &= \frac{\sigma}{1+\xi+2\sigma} \left(\frac{1}{6} + E \right),\end{aligned}\tag{6.86}$$

unde

$$\begin{aligned}E &= \frac{1+\xi}{2(1+\xi+B\sigma)}, & B &= 1+4b^2\beta(1+m_0), \\ \beta &= \frac{1}{1+4b^2}, & b &= \frac{R_a}{2R_c} = \frac{V}{R\Omega},\end{aligned}\tag{6.87}$$

iar m_0 este un exponent în expresia coeficientului de frecare ($m_0 \cong 0,75$)

$$\lambda = n_0 R_a^{m_0} \left(1 + \frac{1}{4b^2} \right)^{\frac{1+m_0}{2}}.\tag{6.88}$$

Dacă viteza circumferențială este cea corespunzătoare semiturației, atunci coeficienții dinamici ai unei etanșări scurte stabiliți de Childs sunt similari cu cei calculați de Black.

Childs a luat în considerație influența vitezei circumferențiale la intrare V_0 . În acest caz, coeficienții dinamici ai etanșării au următoarele expresii:

Coeficienții de rigiditate:

$$K = \mu_3 \left[\mu_0 - \frac{\Omega^2 T^2}{4} (\mu_2 + a_1) \right], \quad k = \mu_3 (\mu_1 + a_2) \frac{\Omega T}{2}; \quad (6.89)$$

Coeficienții de amortizare:

$$C = \mu_3 \mu_1 T, \quad c = \mu_3 (\mu_2 + a_3) \Omega T^2; \quad (6.90)$$

Coeficientul masic:

$$M = \mu_3 \mu_2 T^2, \quad (6.91)$$

unde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2V_0}{a} \frac{2\sigma^2}{1+\xi+2\sigma} \left[\left(E + \frac{1}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a} \right) e^{-a} \right], \\ a_2 &= \frac{2V_0}{a} \frac{2\sigma^2}{1+\xi+2\sigma} \left\{ EB + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{B}{a} \right) \left[(1 - e^{-a}) \left(E + \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \right) - 1 \right] \right\}, \\ a_3 &= \frac{2V_0}{a} \frac{\sigma}{1+\xi+2\sigma} \left[\left(E + \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) - \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-a}}{a} \right) \right], \\ a &= \sigma [1 + \beta (1 + m_0)]. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Dacă $V_0=0$, atunci $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ și se obțin expresiile (6.78)-(6.80).

Pentru o orbită circulară cu raza A și o viteză unghiulară de precesie ω , din ecuația (6.77) se obțin componentele radială și circumferențială ale forței

$$F_r = -(K + c \omega - M \omega^2) A, \quad F_\theta = (k - C \omega) A.$$

Forța circumferențială poate produce regimuri de funcționare instabile.

Exemplul 6.2

Etanșarea de la exteriorul intrării impulsorului (“neck ring”) unei pompe are lungimea $L=50$ mm, raza $R=75$ mm ($L/D=1/3$) și jocul radial $C_r=0,25$ mm.

La turația de lucru $N=1200$ rot/min, căderea de presiune în lungul etanșării este $\Delta p=1.38 \cdot 10^6$ Pa. Proprietățile apei sunt: vâscozitatea dinamică $\mu=4,14 \cdot 10^{-4}$ Ns/m², densitatea $\rho=979$ kg/m³.

Se alege o valoare inițială $V=25$ m/s a vitezei axiale medii.

Numărul Reynolds axial inițial este

$$R_a = \frac{2\rho V C_r}{\mu} = 29559.$$

Numărul Reynolds circumferențial este

$$R_c = \frac{\Omega \rho R C_r}{\mu} = 5572.$$

Rezolvând în funcție de σ rezultă

$$\sigma = \frac{L}{C_r} \frac{0,079}{R_a^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{7R_c}{8R_a} \right)^2 \right]^{3/8} = 1,217.$$

Considerând $\xi=0,1$, din expresia lui Δp se obține o nouă valoare V

$$V = \left(\frac{2\Delta p / \rho}{1 + \xi + 2\sigma} \right)^{1/2} = 26,77 \text{ m/s.}$$

Calculul se repetă iterativ până se obține viteza medie a curgerii $V = 28,592$ m/s pentru care $\sigma = 1,174$.

Valoarea finală a numărului Reynolds axial este $R_a = 33807$, deci curgerea este total turbulentă.

Înlocuind $\xi=0,1$ și $\sigma=1,193$ în expresiile (6.83), se obține

$$\mu_0=0,1414, \quad \mu_1=0,35, \quad \mu_2=0,05287,$$

și de asemenea

$$\mu_3=5,6 \cdot 10^7.$$

Timpul mediu de parcurgere a etanșării este

$$T = \frac{L}{V} = 1,749 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Coefficienții dinamici (6.78)-(6.80) au următoarele valori

$$K = 7,1139 \cdot 10^6 \text{ N/m,} \quad k = 2,0604 \cdot 10^6 \text{ N/m,}$$

$$C = 32793 \text{ Ns/m}, \quad c = 1153 \text{ Ns/m}, \quad M = 9,176 \text{ Ns}^2/\text{m}.$$

Se observă că $\frac{M\Omega}{c} = 1$, deci M și c tind spre zero în cazul precesiei sincrone cu viteza unghiulară de rotație iar componenta radială a forței de reacție F_r este dată doar de rigiditatea directă K .

Pulsația de precesie adimensională $\Omega_w = \frac{k}{C\Omega} = 0,5$ corespunde vitezei circumferențiale medii din etanșare $R\Omega/2$, la fel ca la un lagăr radial cu cuzinet complet. La $\Omega = \omega_n$, prima viteză unghiulară critică a rotorului, componenta tangențială a forței de reacție F_θ devine destabilizatoare la viteza unghiulară $\Omega_{lim} = \frac{\omega_n}{0,5} = 2\omega_n$. Aceasta arată că, teoretic, o etanșare devine destabilizatoare la turații peste dublul primei turații critice a rotorului. Deoarece în etanșări Ω_w poate fi micșorată, viteza unghiulară la limita de stabilitate Ω_{lim} este mărită.

6.10.3 Considerații finale asupra etanșărilor cu lichid

Analiza a fost limitată la: a) suprafețe netede, netexturate și fără caneluri; b) coeficienți de pierdere la intrare constanți și c) viteza circumferențială la intrare complet dezvoltată. S-a presupus că viteza axială a fluidului este mult mai mare decât viteza circumferențială. Principalul efect al variației vitezei circumferențiale la intrare este modificarea coeficienților de rigiditate transversală de cuplaj. Valorile acestor coeficienți scad când viteza circumferențială este micșorată.

De fapt, pentru valori judicioase alese ale geometriei etanșării, căderilor axiale de presiune și vitezei circumferențiale la intrare, coeficienții de rigiditate de cuplaj au semne schimbate; cuplajul transversal produce mai degrabă stabilitate decât instabilitate. Experiențe efectuate pe etanșări cu canale în spirală, la numere Reynolds axiale între 20000 și 40000, au arătat că etanșările lungi cu canale au rigiditatea directă negativă. Pentru a ține cont de canale se folosesc factori de corecție aplicați lungimii etanșărilor netede.

Coeficienții dinamici din relația (6.77) sunt aproape antisimetrice, chiar la pompe cu volută, deși astfel de rezultate sunt de așteptat doar pentru configurații axial-simetrice. Spre deosebire de lagăre, etanșările produc rigiditate directă în poziția centrată, independent de turație, printr-un mecanism hidrostatic.

Coeficienții de amortizare ai etanșărilor au valori relativ mari. Ca urmare, majoritatea pompelor centrifuge funcționează fără probleme de dinamica rotoarelor. La etanșările inelare cu joc mic, efectele masice hidrodinamice sunt importante.

În cazul precesiei sincrone a rotorului, forța de readucere din etanșare crește cu pătratul vitezei unghiulare. S-a imaginat că forța este generată de o masă fictivă, numită *masa Lomakin*. Totuși, o corecție geometrică a masei are sens doar în cazul precesiei sincrone pure. Când masa virtuală este mai mare decât masa geometrică reală, turația critică este suprimată. O astfel de abordare ar fi corectă doar pentru sisteme la care masa Lomakin și masa geometrică apar în același loc. La sisteme în care aceasta nu se întâmplă, efectul Lomakin trebuie tratat ca o rigiditate, fiind deci funcție de turație.

6.11 Etanșări inelare cu gaz

Etanșările inelare cu gaz, sau etanșările labirintice, au rolul de a împiedica scăpările în compresoarele centrifuge. Forțele produse în etanșările cu gaz sunt aproximativ proporționale cu scăderea presiunii în lungul etanșării și cu densitatea fluidului. Datorită dependenței de densitate, etanșările cu gaz au avut un impact major asupra compresoarelor de înaltă presiune pentru gaze cu greutate moleculară mare.

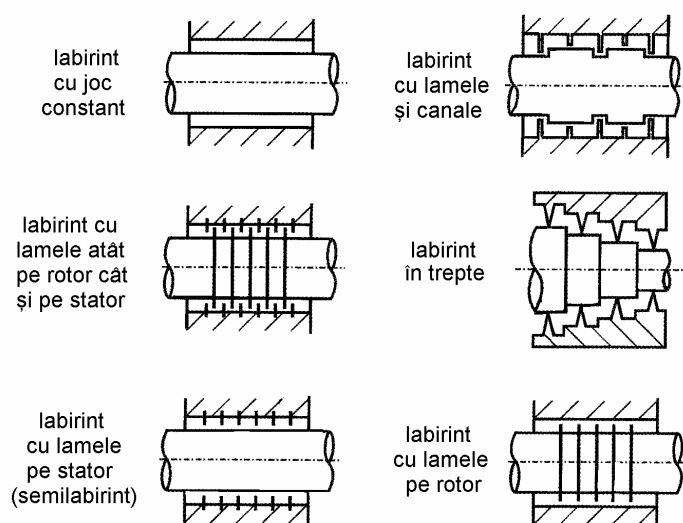


Fig. 6.55 [6.14]

În fig. 6.55 se prezintă câteva tipuri de labirinți utilizați frecvent.

Labirinții pot influența negativ funcționarea liniștită a rotoarelor compresoarelor. Există două tipuri de mecanisme posibile.

1. Primul caz apare atunci când precesia produsă de dezechilibru determină contactul între lamelele labirintului și arbore. Acolo unde un eventual

contact al labirintului produce o încălzire locală și deci o deformare a rotorului, se recomandă un labirint cu lamele pe rotor. Răcirea produsă de lamele protejează arborele de o creștere locală a temperaturii.

2. Al doilea caz este mai puțin evident dar mult mai important. Orice excentricitate produce o modificare a curgerii în labirint și introduce forțe de reacțiune care acționează asupra arborelui micșorând astfel amortizarea în sistemul rotoric. Dacă această amortizare este redusă considerabil, apar vibrații autoîntreținute ale rotorului care fac imposibilă funcționarea compresorului.

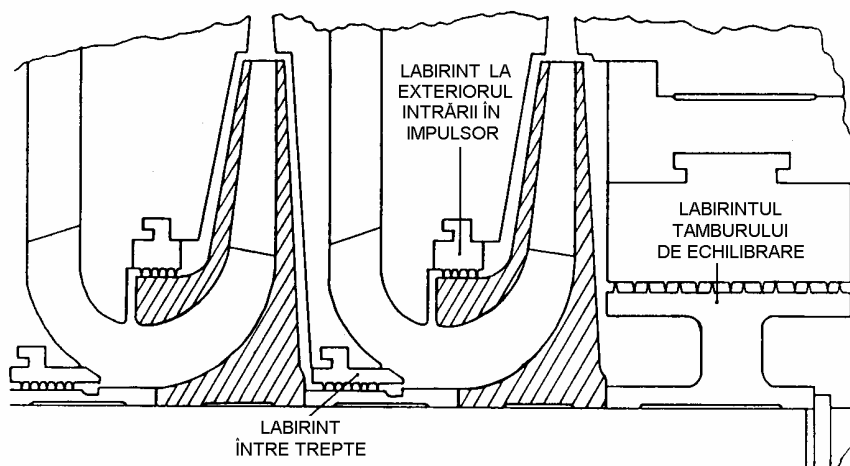


Fig. 6.56 [6.17]

În fig. 6.56 se arată o etanșare tipică pentru roata ultimei trepte a unui compresor. Labirintul plasat în amonte de impulsor limitează scăpările inverse (în sensul descreșterii razei) în lungul inelului frontal al impulsorului. Labirintul plasat între trepte limitează scăpările în lungul arborelui. Ambele etanșări sunt cu “lamele pe stator”, fiind denumite *semilabirinți* (v. fig. 6.55).

Într-un compresor cu flux direct, scăpările pe la tamburul de echilibrare sunt redirecționate spre admisie. Etanșarea de pe tamburul de echilibrare este de tip labirint complet (v. fig. 6.55).

La un compresor în dublu flux, tamburul de echilibrare preia diferența de presiune dintre ultima treaptă a compresorului și ultima treaptă a primei serii de roți centrifuge, deci aproximativ jumătate din căderea de presiune în mașină. Pentru valori date ale presiunilor de aspirație și refulare, densitatea medie a gazului este mai mare în centrul labirintului unei mașini cu dublu flux decât în labirintul tamburului de echilibrare al unei mașini cu flux direct.

Compresoarele cu dublu flux sunt mai sensibile la acțiunea forțelor din labirintul central decât compresoarele cu flux direct la forțele din labirintul

tamburului de echilibrare. Aceasta se datorește deplasărilor laterale mai mari la mijlocul deschiderii între lagăre în primul mod critic de precesie.

Forțele produse de labirintii de etanșare ai compresoarelor sunt cu cel puțin un ordin de mărime mai mici decât cele generate în etanșările cu lichid. În expresia acestora nu apar termeni masici fiind modelate prin relații forță/mișcare de tipul

$$\begin{Bmatrix} -F_y \\ -F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}. \quad (6.93)$$

Termenii diagonali ai matricilor de rigiditate și de amortizare sunt respectiv egali, în timp ce termenii nediagonali sunt egali și cu semne contrare, ceea ce denotă izotropie. Spre deosebire de modelul etanșării pompelor din relația (6.77), coeficientul de rigiditate directă este de obicei neglijabil fiind negativ în multe cazuri.

Coeficienții din ecuația (6.93) depind de densitatea gazului, dând naștere la instabilități “dependente de sarcină”. Aceasta determină un nivel al “puterii la limita de stabilitate” în locul “turației la limita de stabilitate” întâlnită la rotoarele cu lagăre hidrodinamice, care prezintă instabilități dependente de turație.

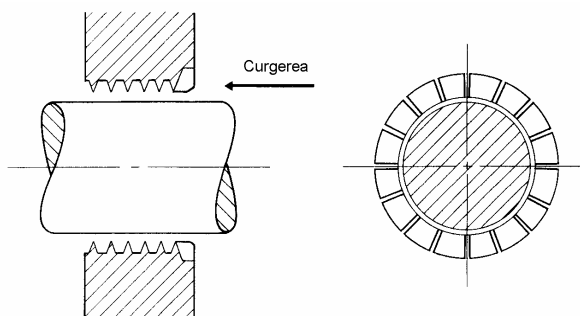


Fig. 6.57 [6.9]

Încercările au arătat că la etanșările labirintice cu lamele pe stator: a) coeficienții de rigiditate transversală cresc direct proporțional cu viteza circumferențială la intrare; b) amortizarea în etanșare este mică dar poate fi luată în considerație pentru a obține predicții rezonabile ale răspunsului rotordinamic, și c) pe măsura micșorării jocurilor, etanșările cu lamele pe rotor devin mai puțin stabile iar cele cu lamele pe stator devin mai stabile.

Soluțiile de stabilizare a precesiei rotorului includ bucșe cu șicane radiale (canale direcționale longitudinale) la intrarea în etanșările labirintice (fig. 6.57). Acestea anulează sau reduc viteza circumferențială la intrarea a gazului.

O altă metodă de stabilizare a compresoarelor include o “linie de șuntare” și constă din redirecționarea gazului de la refularea compresorului și injectarea

acestui în una din primele cavități ale labirintului tamburului de echilibrare (fig. 6.58), eventual în sens contrar rotației. De obicei, fluxul de pe fața posterioară a roții ultimei trepte pătrunde în labirint cu o viteză circumferențială mare, ceea ce produce o forță destabilizatoare. Fluxul de șuntare forțează spre exterior gazul din partea posterioară a roții centrifuge, reducând viteza circumferențială în etanșare.

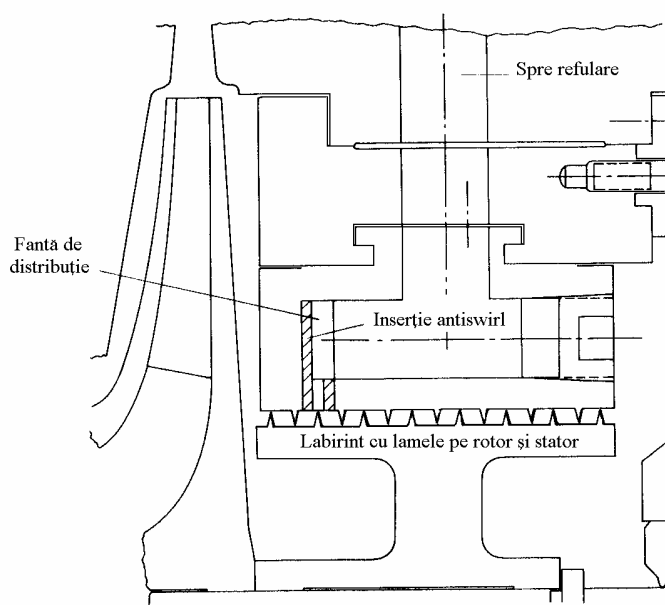


Fig. 6.58 (from [6.9])

Dintre toate etanșările labirintice, forțele destabilizatoare cele mai mari se dezvoltă în labirintul tamburului de echilibrare, deoarece acesta este cel mai lung și are cea mai mare cădere de presiune. Într-o mașină cu flux direct, această etanșare este cea în care gazul are și cea mai mare densitate.

Unele succese în îmbunătățirea stabilității compresoarelor s-au obținut utilizând etanșări în fagure. Acestea dezvoltă coeficienți de destabilizare mai mari decât labirintii dar și coeficienți de amortizare directă mai mari. Etanșările cu perii, care utilizează sârme în contact cu o acoperire ceramică a arborelui, au un debit de scăpări mult redus față de etanșările cu labirint sau fagure.

6.12 Etanșări cu contact flotant

Etanșările cu ulei sunt utilizate frecvent la compresoare multietajate cu turații mari, pentru reducerea scurgerii gazului de proces în atmosferă. În cazul gazelor nocive, o cerință importantă este etanșeitatea. Aceasta se obține utilizând etanșări cu lichid cu inel flotant.

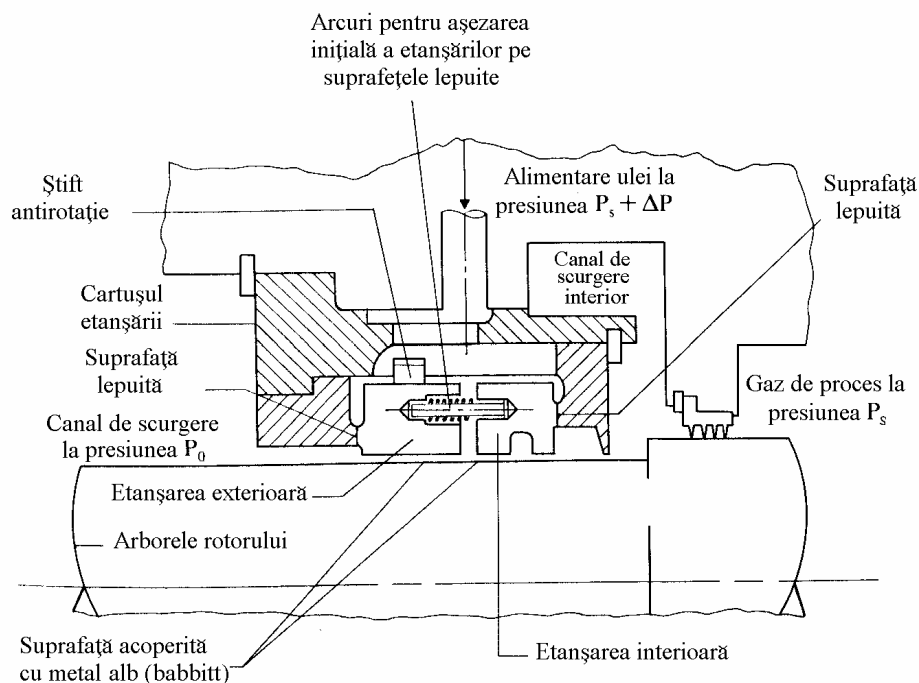


Fig. 6.59 (from [6.9])

6.12.1 Caracteristici constructive

Dacă se poate realiza căderea de presiune necesară, se utilizează un singur inel de etanșare. În caz contrar, se utilizează două inele flotante, cu uleiul alimentat la mijloc, după cum se arată în fig. 6.59.

Etanșarea constă dintr-un inel interior și un inel exterior, între care sunt dispuse arcuri de pretensionare axială, prin care fețele exterioare lepuite ale segmentelor etanșării sunt presate și menținute în contact cu carcasa cartușului etanșării. Un știft antirotație împiedică rotirea segmentelor etanșării.

Uleiul este introdus între segmente la o presiune de alimentare puțin mai mare decât presiunea de aspirație a compresorului și apoi se scurge axial în lungul arborelui. Inelul interior împiedică scurgerea gazului de proces, în timp ce inelul exterior limitează scurgerea uleiului de etanșare spre exterior.

Disiparea căldurii este importantă pentru securitatea în funcționare a etanșărilor cu ulei. Aceasta este asigurată de curgerea uleiului în interstițiile inelare cu jocuri relativ mari ale inelelor, de ordinul 50-80 μm , ceea ce presupune debite mari de scurgeri. Acestea pot fi micșorate dacă la inelul flotant se atașează un sistem de readucere.

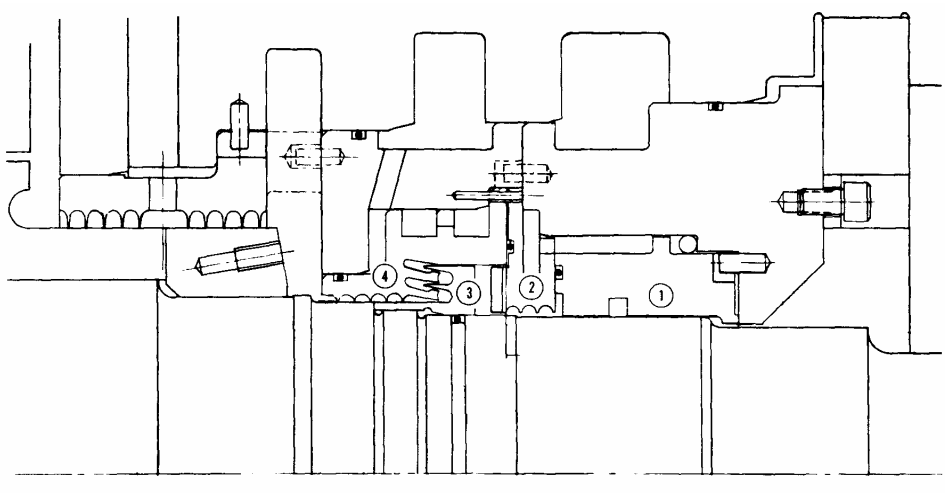


Fig. 6.60 [6.24]

O soluție cu un singur inel de etanșare, folosită într-un compresor cu cinci trepte utilizat în rafinării, este arătată în fig. 6.60, în care: 1 – bușă etanșării cu ulei, 2 – diafragmă, 3 – manșon (impulsor), și 4 – stator.

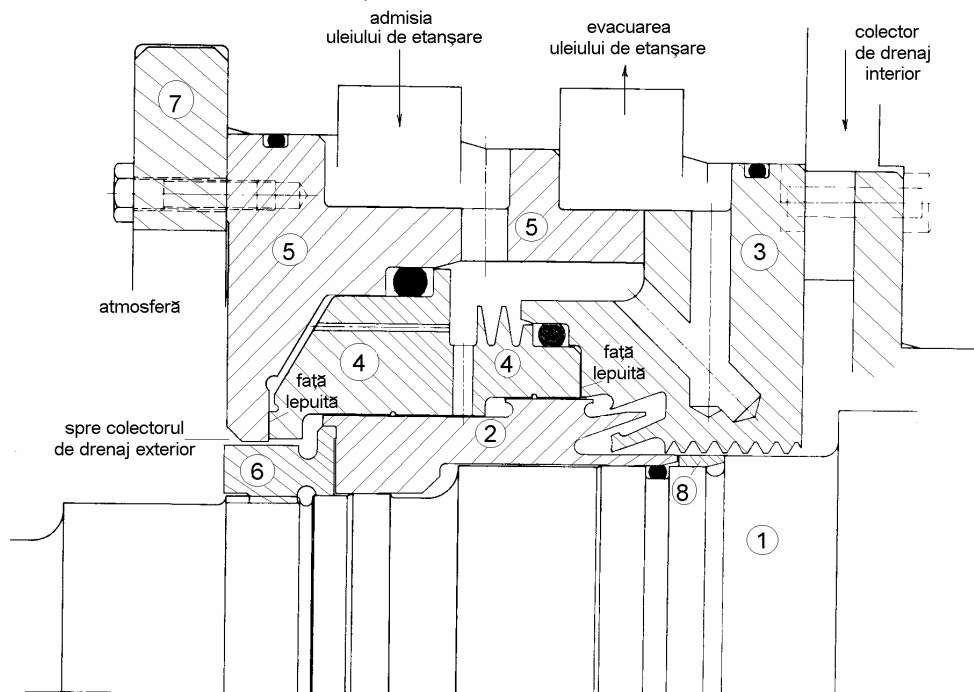


Fig. 6.61 [6.24]

În figura 6.61 se prezintă o etanșare cu bucsă "dublă" în care atât etanșarea interioară cât și cea exterioară se realizează cu un singur inel. Se disting: 1 - arborele, 2 - manșon montat cu strângere sub bucsă, 3 - stator, 4 - bucsă de etanșare dublă în trepte, 5 - colivia bucsii, 6 - piuliță, 7 - inel de fixare, 8 - inel distanțier.

Construcția compactă permite o distanță mai mică între lagăre, deci turații critice mai mari. Interstițiul inelar de ulei se formează între manșonul 2, presat pe arbore, și bucsă de etanșare 4, ghidată axial în colivia 5. Manșonul 2 protejează arborele și simplifică asamblarea și demontarea. Inelul distanțier 8 este reglat la asamblarea inițială, apoi nu mai sunt necesare ajustări in-situ ale componentelor.

Bucsă 4 urmărește liber mișcarea arborelui. Forțele hidrodinamice produse în etanșare sunt micșorate prin mișcarea bucsii și nu se aplică integral arborelui. Etanșarea este insensibilă la uzura pe fețele frontale [6.24].

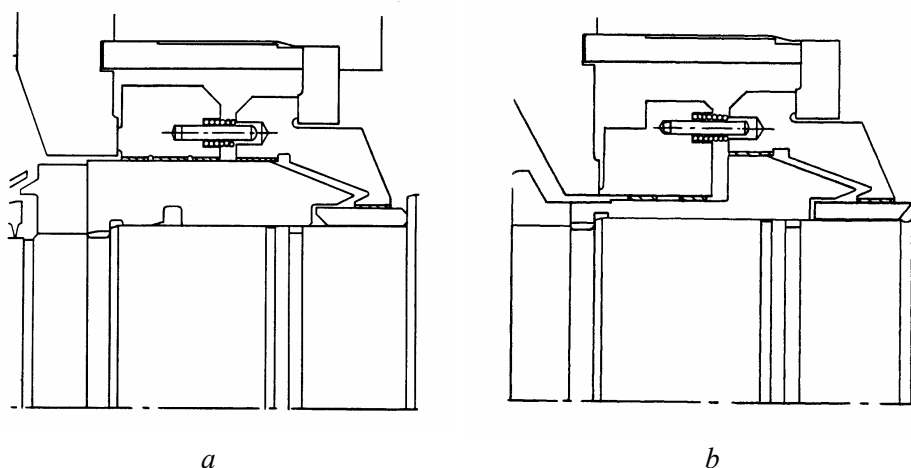


Fig. 6.62 [6.25]

În fig. 6.62 se prezintă o etanșare în con. În fig. 6.62, *a* se arată configurația inițială, la care au apărut vibrații puternice, iar în fig. 6.62, *b* se arată varianta îmbunătățită, obținută reducând lungimea etanșării și lățimea feței lepuite, și mărirind forța de pretensionare din arcuri.

Un aranjament prin care s-a încercat rezolvarea problemei centrării etanșării este arătat în fig. 6.63, în care s-a introdus un segment oscilant în inelul de etanșare de înaltă presiune.

Îmbunătățiri posibile ale inelului de înaltă presiune includ: a) micșorarea suprafeței frontale a etanșării, pentru micșorarea forței axiale neechilibrate, deci a forței de frecare; b) prelucrarea unor canale circumferențiale în alezajul inelului, pentru a reduce lungimea hidrodinamică efectivă a acestuia; și c) mărirea jocului în interstițiul inelar al etanșării.

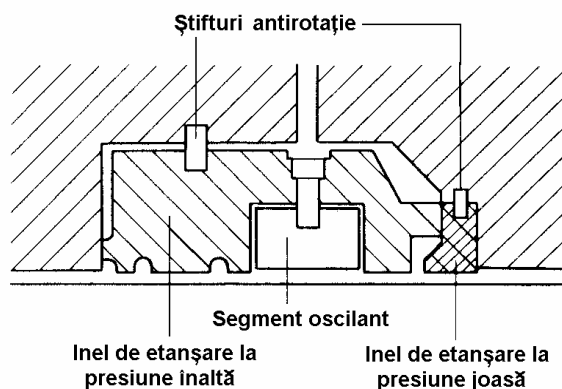


Fig. 6.63 [6.9]

6.12.2 Blocarea inelului etanșării

Compressoarele dotate cu inele de etanșare cu ulei sunt supuse adesea la vibrații subsincrone. Inelele etanșărilor sunt proiectate să se deplaseze radial liber, urmărind mișcarea de precesie a arborelui (rotirea lor este blocată cu știfturi sau alte dispozitive care permit mișcarea radială a inelului). Dacă inelul etanșării se mișcă împreună cu arborele, forța produsă în filmul de ulei dintre arbore și inel este foarte mică, la fel și coeficienții dinamici ai etanșării.

În anumite situații, inelul etanșării poate fi împiedicat să se miște, fenomen cunoscut sub numele de “blocarea (griparea) inelului etanșării”. Aceasta produce forțe mari între arbore și inel, deci coeficienți de rigiditate și de amortizare de valori mari.

Generarea rigidităților transversale prin blocarea inelului etanșării, într-o mașină cu lagăre cu segmenti oscilanți, poate fi descrisă după cum urmează [6.26]:

1. Când arborele este în repaus, uleiul stă deasupra arborelui. Pe măsură ce turația mașinii crește, filmul de ulei din etanșare pătrunde în partea de jos și susține greutatea bușei de etanșare.

2. Căderea de presiune în lungul etanșării crește cu turația mașinii. Aceasta mărește forța axială datorită presiunii neechilibrate și, corespunzător, forța de frecare radială care acționează asupra inelului etanșării (egală cu coeficientul de frecare înmulțit cu forța axială). Când forța de frecare radială devine mai mare decât forța radială din filmul de ulei, etanșarea se gripează.

3. Dacă turația arborelui continuă să crească, forțele din filmul de ulei al lagărelor (cu segmenti oscilanți) tind să deplaseze arborele în sus în lagăr (lagărele sunt descărcate). Forțele din filmul de ulei al etanșării se opun acestei deplasări, deoarece arborele ocupă acum o poziție excentrică în inelul blocat al etanșării.

4. Forțele produse de dezechilibrul inerent al rotorului determină precesia acestuia. Aceasta produce forțe dinamice în filmul de ulei dintre arbore și inelul blocat al etanșării. Dacă suma forțelor statice și dinamice este mai mare decât forța de frecare radială, inelul etanșării se va mișca. Dacă forțele dinamice nu sunt suficient de mari pentru a depăși forța de frecare radială, inelul etanșării se va gripa. Aceasta se poate întâmpla la turații mult inferioare turației critice.

5. Pe măsură ce turația arborelui crește, forțele de portanță produse de filmul de ulei din lagăre vor deplasa arborele în sus în lagăre. Arborele va fi într-o poziție excentrică față de inelul de etanșare gripat. Aceasta va genera coeficienți de rigiditate transversală de cuplaj de valori mari, care vor acționa asupra arborelui datorită filmului de ulei din etanșare.

6.12.3 Coeficienții dinamici ai unei etanșări blocate

În calcule aproximative se presupune că inelul etanșării este blocat cu arborele în poziție centrată și se comportă ca un lagăr radial cu cuzinet complet, necavitat, în care nu există cădere de presiune. Etanșările cu ulei sunt scurte ($0,05 < L/D < 0,2$), curgerea uleiului fiind laminară și fără cavitație.

Pentru acest caz centric, coeficienții de rigiditate transversală sunt [6.24]

$$k_{yz} = -k_{zy} = \frac{\pi}{4} \Omega D \mu \left(\frac{L}{C_r} \right)^3 = 2\pi \Omega \mu L \left(\frac{R}{C_r} \right)^3 \left(\frac{L}{D} \right)^2, \quad (6.94)$$

unde Ω – viteza unghiulară de rotație a arborelui, rad/s, D – diametrul arborelui, R – raza arborelui, L – lungimea (axială a) etanșării, C_r - jocul radial în filmul de ulei al etanșării, μ - vâscozitatea dinamică a uleiului.

Deoarece coeficienții sunt proporționali cu L^3 , o reducere considerabilă a destabilizării se poate obține prelucrând canalele circumferențiale pe fața interioară a etanșării, așa cum se arată în fig. 6.63.

La o etanșare concentrică, coeficienții de rigiditate directă k_{yy} și k_{zz} sunt neglijabili. Coeficienții de amortizare directă au expresiile

$$c_{yy} = \frac{2}{\Omega} k_{yz}, \quad c_{zz} = \frac{2}{\Omega} k_{yz}. \quad (6.95)$$

De notat că acești coeficienți sunt invers proporționali cu C_r^3 , deci foarte sensibili la variația jocului în etanșare. Astfel, jocurile mărite în etanșări vor permite funcționarea cu vibrații reduse chiar atunci când etanșările sunt gripate.

Valorile coeficienților de rigiditate ai etanșărilor excentrice sunt de câteva ori mai mari decât ale etanșărilor centrate.

Există metodologii mai precise pentru calculul coeficienților dinamici ai etanșărilor, bazate pe diferite ipoteze privind excentricitatea etanșării gripate [6.17]. Rezultatele diferă în funcție de presupunerea că blocarea etanșării produce creșterea sau descreșterea încărcării fusului în lagărele rotorului.

Funcționarea stabilă a unui rotor este posibilă chiar atunci când etanșarea se blochează și jocurile în etanșare sunt excesiv de mari. Datorită blocării excentrice a inelului etanșării se dezvoltă rigidități directe. Scăderea încărcării lagărelor determină o creștere a frecvențelor proprii ale rotorului, deoarece distanța efectivă între lagăre este micșorată prin transferarea sarcinii către etanșări. În acest caz, frecvența instabilității nesincrone este mai mare decât turația critică calculată pentru lagăre rigide.

O metodă cvasistatică [6.26] pentru determinarea condițiilor de gripare a inelului etanșării a fost utilizată cu rezultate promițătoare. Egalând forța de frecare radială cu greutatea inelului etanșării, se calculează turația de blocare inițială a inelului. Cu creșterea turației, arborele se ridică de pe segmentul inferior al lagărelor cu segmenti oscilanți. Utilizând relațiile cunoscute, stabilite pentru lagăre cu segmenti oscilanți, se determină poziția arborelui față de linia centrelor lagărelor, pe baza căreia se poate calcula excentricitatea și unghiul de atitudine ale inelului etanșării cu ulei, pentru o încărcare egală cu greutatea acestuia. Astfel, deoarece unghiul de atitudine static depinde de forța de frecare, acesta este nedeterminat. Cea mai dificilă este alegerea valorii coeficientului de frecare.

În continuare, calculul coeficienților dinamici se poate face utilizând modelul Ocvirk de lagăr infinit scurt [6.17]. Relația între excentricitatea relativă statică ε_0 și numărul Sommerfeld modificat

$$S_s = \frac{\mu L D}{W} \frac{N}{60} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \left(\frac{L}{D} \right)^2 = \frac{W_*}{W} \quad (6.96)$$

pentru un lagăr scurt, este ilustrată în fig. 6.64, *a*. În fig. 6.64, *b* se dau coeficienții dinamici în funcție de numărul Sommerfeld modificat pentru un lagăr scurt cu unghiul de atitudine de 90° [6.9].

Pentru această valoare a unghiului de atitudine, etanșarea nu are rigiditate directă iar coeficienții de rigiditate transversală și de amortizare directă cresc considerabil cu scăderea lui S_s , deci cu creșterea excentricității relative statice. Creșterea coeficienților c_{yy} și c_{zz} cu ε_0 poate fi avantajoasă la turații mici, când rotorul trece printr-o turație critică. Totuși, creșterea coeficienților k_{yz} și k_{zy} poate produce instabilitatea rotorului la turații de ordinul dublului turației critice.

În Tabelul 6.10 [6.27] se dau coeficienții adimensionali ai unei etanșări cu ulei, pentru cinci valori ale excentricității relative statice ε_0 .

Coeficienții fizici (dimensionali) se calculează cu relațiile

$$k_{i,j} = \bar{K}_{i,j} \frac{W_*}{C_r}, \quad c_{i,j} = \bar{C}_{i,j} \frac{W_*}{\Omega C_r}, \quad (i, j = y, z) \quad (6.97)$$

unde

$$W_* = \frac{\pi \mu R L^3 N}{60 C_r^2} = \mu \Omega L D \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \left(\frac{L}{D} \right)^2 \quad (6.98)$$

și $\Omega = 2\pi N/60$.

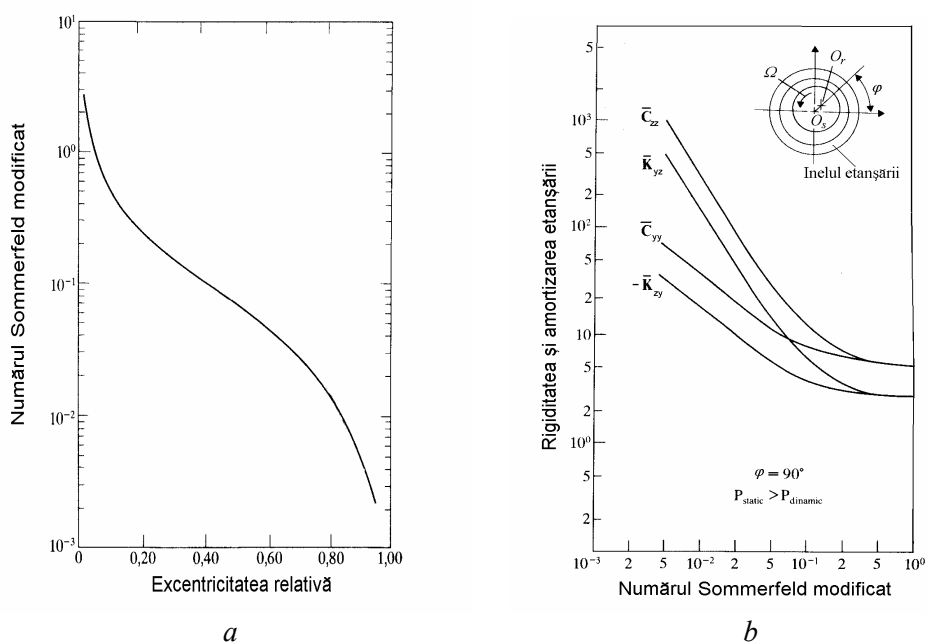


Fig. 6.64 [6.9]

Tabelul 6.10

ε_0	\bar{K}_{yz}	\bar{K}_{zy}	\bar{C}_{yy}	\bar{C}_{zz}
0,01	3,14	-3,14	6,28	6,28
0,1	3,28	-3,19	6,38	6,57
0,2	3,76	-3,33	6,67	7,51
0,5	9,67	-4,84	9,67	19,35
0,8	92,1	-14,54	29,1	184,2

Se observă că $\bar{K}_{yz} \neq -\bar{K}_{zy}$ și $\bar{C}_{yy} \neq \bar{C}_{zz}$, deci etanșarea excentrică blocată este anizotropă.

Coeficienții de rigiditate directă și de amortizare directă sunt mai puțin importanți decât cei de cuplaj transversal, deoarece etanșările sunt amplasate lângă lagăre. Coeficienții de rigiditate directă și de amortizare directă ai lagărelor sunt mult mai mari decât cei ai etanșărilor. Lagărele cu segmenti oscilanți încărcate simetric au coeficienți de cuplaj transversal nuli. În aceste condiții, coeficienții de cuplaj transversal ai etanșărilor devin importanți.

Într-o etanșare simplă, forța axială este aproximativ $\frac{\pi}{2} D t \Delta p$. Pentru o cădere de presiune $\Delta p = 6,89 \cdot 10^6$ Pa, un diametru $D = 165$ mm și o lățime a suprafeței frontale $t = 6,35 \cdot 10^{-3}$ m, forța axială de gripare este $1,11 \cdot 10^4$ N. La un rotor cu trei etanșări, considerând coeficientul de frecare 0,1, forța radială dezvoltată poate fi $3,34 \cdot 10^3$ N, o valoare egală cu sarcina tipică dintr-un lagăr.

Este ușor de observat că, dacă la compresoare de înaltă presiune, cu rotor de greutate medie, nu se utilizează un tip special de inel de etanșare cu echilibrarea presiunii, atunci lagărele și etanșările interacționează ca reazeme ale rotorului. La compresoare de joasă presiune, cu rotor de greutate mare, această interacțiune este puțin probabilă.

Astfel, în afara influenței asupra densității gazului, presiunea înaltă din compresor poate produce indirect instabilitate în mașini altfel stabile, prin griparea etanșărilor cu ulei, astfel încât să determine interacțiunea acestora cu sistemul stabil rotor - lagăr cu segmenti oscilanți.

În *concluzie*, etanșările cu ulei trebuie proiectate să lucreze doar ca elemente de etanșare și să nu devină parte componentă a sistemului dinamic rotor-lagăr. O etanșare cu presiune echilibrată trebuie să fie o cerință în proiectare și orice element capabil să producă griparea etanșării trebuie eliminat din construcția compresorului.

Bibliografie

- 6.1 Someya T. (ed.), *Journal-Bearing Databook*, Springer, Berlin, 1988.
- 6.2 Constantinescu, V. N., Nica, Al., Pascovici, M. D., Ceptureanu, Gh., Nedelcu, Șt., *Lagăre cu alunecare*, Editura tehnică, București, 1980.
- 6.3 Rieger, N. F., *Vibrations of Rotating Machinery*, Vibration Institute, Illinois, 1977.
- 6.4 Lund, J. W., *Rotor-Bearing Dynamics*, Ossolineum, 1979.
- 6.5 Lee, C.-W., *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

- 6.6 Childs, D., Moes, H. and van Leeuwen, H., *Journal bearing impedance descriptions for rotordynamic applications*, Journal of Lubrication Technology, p. 198-219, 1977.
- 6.7 Adams, M. L., *Insights into linearized rotor dynamics, Part 2*, Journal of Sound and Vibration, vol.112, nr.1, p. 97-110, 1987.
- 6.8 Cameron, A., *Basic Lubrication Theory*, 3rd ed., Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1981.
- 6.9 Ehrich, F. F. (ed.), *Handbook of Rotordynamics*, Mc Graw Hill, New York, 1992.
- 6.10 Bhushan, G., Rattan, S. S. and Mehta, N. P., *Effect of pressure dams and relief-tracks on the performance of a four-lobe bearing*, IE (I) Journal-MC, vol.85, p. 194-198, 2005.
- 6.11 Chen, W. J. and Gunter, E. J., *Introduction to Dynamics of Rotor-Bearing Systems*, Trafford, Victoria, 2005.
- 6.12 Lund, J. W., *Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing*, ASLE Transactions, vol.7, no.4, p. 342-352, 1964.
- 6.13 Hamrock, B. J. and Anderson, W. J., *Incompressibly lubricated Rayleigh step journal bearing*, NASA TN D-4873, 1968.
- 6.14 Gasch, R., Nordmann, R. and Pfützner, H., *Rotordynamik*, 2. Auflage, Springer, Berlin, 2002.
- 6.15 El-Shafei, A., *Squeeze film dampers: effective damping devices for rotating machinery*, Vibrations, vol.5, nr.3, p. 8-11, 1989.
- 6.16 Gunter, E. J., Barrett, L. E. and Allaire, P. E., *Stabilization of turbomachinery with squeeze film dampers – Theory and applications*, Proc. Conf. "Vibrations in Rotating Machinery", I. Mech. Eng., University of Cambridge, 15-17 Sept. 1976, p. 291-300, 1977.
- 6.17 Childs, D., *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modelling and Analysis*, Wiley, 1993.
- 6.18 Barrett, L. E., *Turbulent flow annular pump seals: A literature review*, Shock and Vibration Digest, vol.16, nr.2, p. 3-13, 1984.
- 6.19 Yamada, Y., *Resistance of flow through an annulus with an inner rotating cylinder*, Bull. J.S.M.E., vol.5, nr.18, p. 302-310, 1962.
- 6.20 Black, H. F., *Effects of hydraulic forces in annular pressure seals on the vibrations of centrifugal pump rotors*, J. Mech. Eng. Sci., vol.11, nr.2, p. 206-213, 1969.

- 6.21 Black, H. F. and Jenssen, D. N., *Dynamic hybrid properties of annular pressure seals*, J. Mech. Eng. Sci., Proc. Inst. Mech. Eng., vol.184, p. 92-100, 1970.
- 6.22 Childs, D. W., *Dynamic analysis of turbulent annular seals based on Hirs' lubrication equation*, J. of Lubrication Technology, Trans. ASME, vol.105, p. 437-444, 1983.
- 6.23 Hirs, G. G., *A bulk-flow theory for turbulence in lubricant films*, J. of Lubrication Technology, Trans. ASME, p. 137-146, 1973.
- 6.24 Emerick, M. F., *Vibration and Destabilizing Effects of Floating Ring Seals in Compressors*, NASA CP 2250, p. 187-204, 1982.
- 6.25 Kirk, R. G. and Simpson, M., *Full Load Shop Testing of 18000 HP Gas Turbine Driven Centrifugal Compressor for Offshore Platform Service: Evaluation of Rotor Dynamic Performance*, NASA CP 2409, p. 1-13, 1985.
- 6.26 Allaire, P. E. and Kocur, J. A. Jr., *Oil Seal Effects and Synchronous Vibrations in High-Speed Compressors*, NASA CP 2409, p. 205-223, 1985.
- 6.27 Kirk, R. G., *The impact of rotor dynamics analysis on advanced turbo compressor design*, Proc. Conf. "Vibrations in Rotating Machinery", I. Mech. Eng., University of Cambridge, 15-17 Sept. 1976, p. 139-150, 1977.

7.

INSTABILITATEA PRECESIEI ROTOARELOR

În anumite condiții de funcționare, raza orbitei de precesie a unui rotor crește brusc și frecvența precesiei devine nesincronă. Cu rare excepții, aceasta corespunde primei frecvențe proprii de încovoiere a sistemului rotor-lagăre, adică frecvenței corespunzătoare primei turații critice. În majoritatea cazurilor nu se poate trece prin această limită de stabilitate fără a periclita integritatea mecanică a mașinii.

Dacă interesează doar stabilitatea poziției de echilibru static a axei rotorului, sistemul poate fi considerat liniar. La limita de stabilitate, definită prin “turația de apariție a instabilității”, partea reală a unei valori proprii devine zero. Neliniaritățile influențează puțin sau deloc această turație limită. Modelul liniar conține toți parametrii esențiali care explică mecanismul fizic al instabilității. Neliniaritățile trebuie luate în considerație doar atunci când interesează comportarea rotorului la turații mai mari decât cea de apariție a instabilității. Aceasta depășește scopul prezentării de față.

În acest capitol se prezintă instabilitățile produse de forțele hidrodinamice din lagăre și etanșări, de interacțiunea fluidului de lucru cu roțile și discurile paletate, de frecarea uscată, de amortizarea internă în arbore și de asimetria rotorului. Unele dintre acestea sunt instabilități *autoexcitate*, în care precesia are loc la o frecvență subsincronă egală cu o frecvență proprie a sistemului. Altele sunt produse de *excitații parametrice*, putând fi sincrone, sub- sau supra-sincrone. Acestea sunt mai apropiate de vibrațiile forțate și unele pot apare în tot domeniul de instabilitate (până rotorul ajunge la o turație la care precesia este stabilă).

7.1 Precesia instabilă a arborilor în rotație

În cazul precesiei cu orbite nestaționare, rotoarele sunt destabilizate de forțe de reacție tangențiale, perpendiculare pe o deplasare radială și orientate în sensul mișcării de precesie, în sens contrar forței de amortizare externă, care tinde să reducă mișcarea de precesie. Adesea aceste forțe se consideră proporționale cu deformația radială (fig. 7.1). Factorul de proporționalitate este un coeficient de *rigiditate*

transversală de cuplaj, care exprimă amplitudinea forței în funcție de o deformare perpendiculară pe forță.

În formă matricială

$$\begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & k_{yz} \\ -k_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (7.1)$$

unde termenii de cuplaj transversal sunt antisimetrice

$$k_{zy} = -k_{yz}. \quad (7.2)$$

Așa cum se arată în Secțiunea 6.6, deoarece forța tangențială f_T acționează în sensul precesiei, aceasta introduce energie în sistem, deci produce amortizare “negativă”.

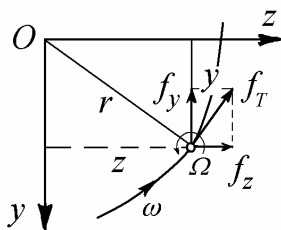


Fig. 7.1

Dacă mișcarea liberă se descompune în două mișcări cu orbite în spirală (fig. 5.26), una în sensul rotației și cealaltă în sens contrar, la turații mai mici decât *turația de apariție a instabilității* ambele spirale au amplitudini descrescătoare. La turații mai mari decât *turația de apariție a instabilității*, în majoritatea cazurilor, amplitudinea precesiei în sensul rotației crește exponențial (deci este instabilă) în timp de precesia în sens contrar rotației are amplitudine descrescătoare. Amortizarea “negativă” este produsă de componenta directă a precesiei.

La un rotor cu o masă concentrată m și un arbore cu rigiditatea k , în mișcare de precesie cu viteza unghiulară ω și raza instantanee r , forțele care acționează asupra masei sunt (fig. 7.2) forța centrifugă $m\omega^2 r$, forța de readucere elastică kr , forța de amortizare radială $c(dr/dt)$, forța de inerție radială $m(d^2r/dt^2)$, forța de amortizare tangențială $c\omega r$, forța Coriolis $2m\omega(dr/dt)$ și forța destabilizatoare f_T . Ecuațiile de mișcare se pot scrie utilizând principiul lui d’Alembert [7.1].

Echilibrul forțelor radiale se scrie

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + c \frac{dr}{dt} + kr - mr\omega^2 = 0, \quad (7.3)$$

iar echilibrul forțelor tangențiale se scrie

$$2m\omega \frac{dr}{dt} + c\omega r - f_T = 0, \quad (7.4)$$

unde forța destabilizatoare este proporțională cu deformația radială

$$f_T = k_{yz} r, \quad (7.5)$$

iar k_{yz} este rigiditatea transversală de cuplaj.

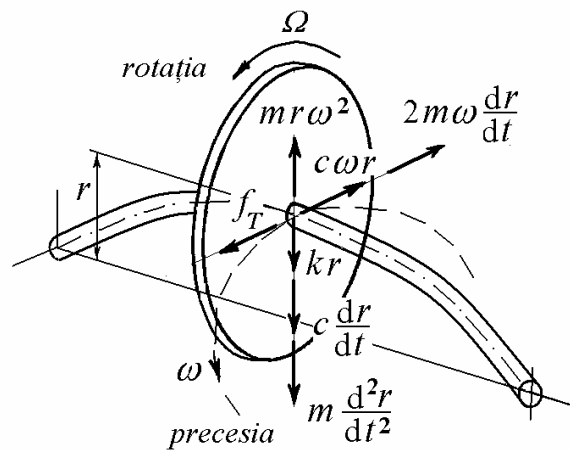


Fig. 7.2

Soluția are forma

$$r = r_0 e^{\lambda t}. \quad (7.6)$$

Pentru ca sistemul să fie stabil, coeficientul exponentului

$$\lambda = \frac{k_{yz} - c\omega}{2m\omega} \quad (7.7)$$

trebuie să fie negativ, de unde rezultă condiția de funcționare stabilă

$$k_{yz} < c\omega \quad (7.8)$$

sau, în formă adimensională,

$$\frac{k_{yz}}{m\omega^2} < \frac{c}{m\omega} = 2\zeta \quad (7.9)$$

unde ζ este raportul de amortizare.

La apariția instabilității $\lambda = 0$, deci din ecuația (7.3) rezultă că viteza unghiulară a precesiei la limita de stabilitate este

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.10)$$

Aceasta este pulsația proprie a rotorului și nu depinde de turație. Chiar dacă viteza unghiulară de rotație Ω crește, viteza unghiulară a precesiei rămâne egală cu pulsația proprie a rotorului, deci precesia este o mișcare *subsincronă*.

La turații peste limita apariției instabilității, $\lambda > 0$ și soluția (7.6) descrie o spirală cu creștere exponențială, de unde numele de “*rotor whirling*”. De fapt, datorită neliniarităților din sistem, creșterea amplitudinii produce o disipare a energiei mai rapidă decât cea calculată cu un model liniar. Deci amplitudinea precesiei crește puternic în timp dar tinde spre o orbită limită staționară închisă.

Relația (7.9) arată că, prin creșterea raportului de amortizare al statorului, turația de apariție a instabilității este deplasată spre valori mai mari. Stabilitatea rotorului se ameliorează prin creșterea amortizării externe sau, echivalent, prin introducerea anizotropiei în suportul lagărelor (v. Secțiunea 3.1.3). Sensibilitatea unui rotor la acțiunea forțelor destabilizatoare crește cu flexibilitatea acestuia. Pentru evitarea instabilității trebuie mărită rigiditatea sistemului (deci turațiile critice).

7.2 Instabilitatea datorită amortizării rotative

Instabilitatea datorită frecării interne a unui rotor este analizată în Secțiunile 2.3.2, 2.3.3 și 3.1.3 (Partea I) pentru un rotor cu un singur disc. Se calculează turația la limita de stabilitate în cazul amortizării vâscoase, arătând că aceasta poate fi mărită utilizând suportți cu rigiditate anizotropă.

În anul 1980 Stephen Crandall a publicat un articol remarcabil [7.2] în care dă o explicație fizică faptului că un mecanism de disipare a energiei poate produce instabilitate. Pe baza unui model bidimensional simplu, Crandall prezintă mecanismul destabilizator al amortizării în piesele în rotație și utilizează o metodă fizică elementară pentru determinarea limitei de stabilitate. Prezentarea care urmează reproduce o mare parte a acestei lucrări.

7.2.1 Modelul plan al unui rotor

Se consideră modelul plan al unui disc rigid montat pe un arbore elastic (fig. 7.3). Inelul rigid este forțat să se rotească cu viteza unghiulară Ω de o sursă exterioară. O masă punctiformă este suspendată elastic de inel prin patru arcuri liniare, de masă neglijabilă. Masa m reprezintă discul central al modelului Laval-Jeffcott iar arcurile reprezintă arborele de masă neglijabilă, cu rigiditatea k , independentă de turație. Se neglijează efectul greutateii proprii în planul figurii.

Pentru deplasări mici, sistemul forțelor elastice este circular izotrop. În poziția de echilibru masa este în originea axelor de coordonate. Când masa are o deplasare radială r în orice direcție în plan, forța de readucere elastică este kr , orientată spre origine.

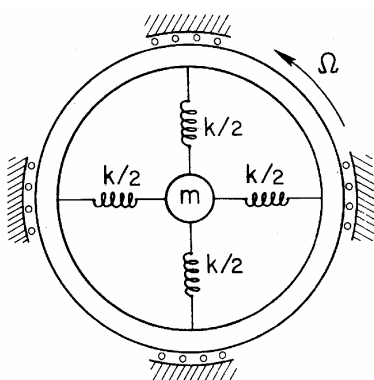


Fig. 7.3 [7.2]

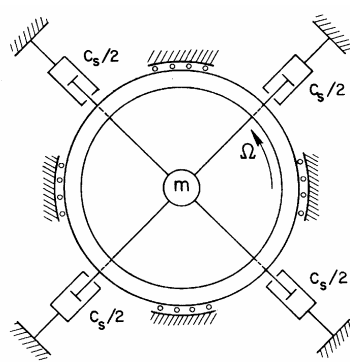


Fig. 7.4 [7.2]

Mișcarea poate fi descrisă în funcție fie de coordonatele fixe y, z , fie de coordonatele mobile η, ζ fixate de inelul în rotație, ca în fig. 2.14.

În coordonate fixe, ecuațiile de mișcare ale masei au forma (2.1). Ecuațiile sunt decuplate și independente de Ω . Toate mișcările naturale sunt combinații liniare a două moduri independente care au aceeași pulsație $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Cele două moduri independente pot fi oscilații rectilinii în lungul a două diametre perpendiculare între ele sau o pereche de moduri de precesie circulară, unul de precesie directă și celălalt de precesie inversă.

Ecuațiile de mișcare față de axele în rotație η, ζ sunt

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7.11)$$

7.2.2 Efectul calitativ al amortizării

În continuare se consideră efectul introducerii amortizării vâscoase liniare izotrope în modelul rotorului din fig. 7.3. Amortizarea externă este reprezentată în fig. 7.4 prin patru amortizoare dispuse între masa m și sistemul de referință fix. Pentru deplasări mici ale masei m , sistemul de amortizoare dezvoltă o forță de amortizare circular izotropă. Forța rezultantă a amortizoarelor acționează în sens contrar vitezei absolute a masei m . Dacă m este forțată să se deplaseze pe o orbită circulară de rază r în sens antiorar cu viteza unghiulară ω_n , atunci forța de amortizare $c_s r \omega_n$ acționează tangent la cerc în sens orar.

Amortizarea mișcării relative față de sistemul în rotație este reprezentată în fig. 7.5 prin patru amortizoare dispuse între masa m și inelul în rotație.

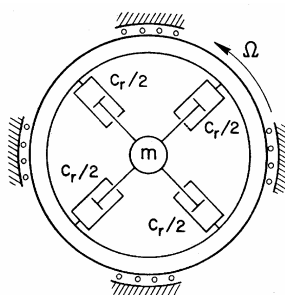


Fig. 7.5 [7.2]

“Pentru deplasări mici ale masei m , amortizoarele dezvoltă o forță de amortizare circular izotropă care acționează în sens contrar vitezei relative a masei m față de inelul în rotație. În particular, dacă m este forțată să se deplaseze pe o orbită circulară de rază r în sens antiorar cu viteza unghiulară ω_n față de axele fixe, aceasta va apărea că are o viteză unghiulară $\omega_n - \Omega$ în sens antiorar față de axele în rotație. Forța de amortizare generată de amortizoarele în rotație este $c_r r (\omega_n - \Omega)$ și acționează tangent la cerc în sens orar.”

“Efectul acestor mecanisme de amortizare asupra mișcării libere a rotorului poate fi apreciat calitativ după cum urmează. Să presupunem că forțele de amortizare sunt foarte mici în comparație cu forțele de readucere din arcuri. Rezultă că pe durata unei perioade $2\pi/\omega_n$ amortizarea va produce o modificare nesemnificativă a orbitei libere. Dacă inițial orbita este un cerc de rază r parcurs în sens antiorar și dacă viteza unghiulară de rotație a rotorului Ω este subcritică, adică mai mică decât pulsația proprie a mișcării libere ω_n , atunci atât amortizoarele fixe cât și cele în rotație acționează să întârzie mișcarea masei m . Rotorul efectuează lucru mecanic asupra amortizoarelor iar energia totală a mișcării rotorului pe orbită este diminuată.

Considerând orbita ca rezultat al suprapunerii unei precesii inverse și a unei precesii directe, un raționament analog arată că razele ambelor componente scad după o perioadă. Orice orbită a rotorului rezultată în urma unei perturbații accidentale va fi amortizată iar sistemul este stabil.”

“Când sistemul se rotește supracritic, amortizoarele rotative efectuează lucru mecanic asupra rotorului și cresc energia mișcării rotorului pe orbită. Această acțiune destabilizatoare poate fi observată revenind la fig. 7.5 și considerând cazul unei precesii inverse de rază r cu viteza unghiulară absolută ω_n când $\Omega > \omega_n$. Mișcarea relativă este acum o precesie inversă (în sens orar) cu viteza unghiulară $\Omega - \omega_n$. Forța rezultantă a amortizoarelor acționează tangent la traiectoria circulară în sens direct (antiorar) cu amplitudinea $c_r r (\Omega - \omega_n)$. În acest fel, rotația supracritică a sistemului împinge rotorul în sensul mișcării pe orbită prin intermediul amortizoarelor rotative.”

“Această acțiune poate fi ilustrată mai clar dacă, în locul celor patru amortizoare din fig. 7.5, se consideră că interiorul inelului este plin cu un fluid vâcos de masă neglijabilă care se rotește odată cu inelul și acționează în sensul încetării mișcării relative a masei m față de inel. Când masa are o orbită circulară în același sens absolut cu rotația inelului, dar cu o viteză mai mică, forța opusă rezistenței vâscoase împinge masa înainte și adaugă energie mișcării pe orbită producând creșterea razei.”

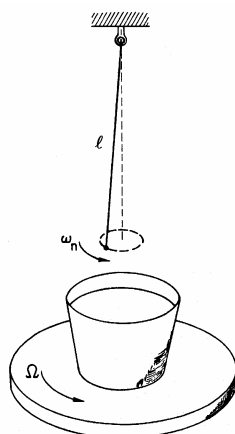


Fig. 7.6 [7.2]

Un model echivalent este prezentat în fig. 7.6 (Pippard, 1978). Rotorul este modelat ca un pendul conic, compus din o masă concentrată suspendată, în câmpul gravitațional, de un fir cu lungimea ℓ . Pendulul are două moduri proprii conice, de precesie directă și precesie inversă, cu aceeași pulsație proprie $\omega_n = \sqrt{g/\ell}$ (pentru unghiuri de înclinare mici). Amortizarea este modelată imersând masa pendulului

într-un pahar cu apă. Dacă paharul este așezat pe o masă rotativă cu turație variabilă, se poate pune în evidență amortizarea față de un sistem de referință în rotație. “Dacă fluidul se rotește mai încet decât masa pendulului pe orbita sa circulară, asupra masei acționează o forță de încetinire și înclinarea pendulului față de verticală scade. Dacă însă fluidul se rotește mai repede decât masa pendulului, el împinge masa înainte și mărește raza orbitei, măbind înclinarea firului față de verticală.”

“Revenind la modelul plan al rotorului cu amortizare staționară și amortizare rotativă, o precesie directă cu viteza unghiulară absolută ω_n va fi întârziată de forța de amortizare staționară și va fi accelerată doar de forța de amortizare rotativă când rotația este supracritică, $\Omega > \omega_n$. Energia mișcării orbitale de precesie scade sau crește în funcție de care dintre aceste forțe este mai mare. Stabilitatea neutră apare când cele două forțe sunt egale. În acest caz energia mișcării pe orbită nu variază iar mișcarea liberă persistă indefinit. Determinarea cantitativă a pragului de stabilitate este discutată în secțiunea următoare, luând în considerație dependența de frecvență a mecanismelor de amortizare.”

7.2.3 Turația la limita de stabilitate a rotoarelor cu amortizare rotativă

Pentru câteva sisteme considerate în continuare în acest capitol, este util studiul variației vitezelor unghiulare de precesie în funcție de viteza unghiulară de rotație Ω .

7.2.3.1 Analiza în coordonate rotative

În coordonate rotative, ecuațiile de mișcare pentru modelul plan al rotorului din fig. 7.3 (arbore perfect echilibrat) cu amortizoarele rotative din fig. 7.5 sunt

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r & -2m\Omega \\ 2m\Omega & c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7.12)$$

Se observă că amortizarea rotativă este reprezentată atât printr-un termen de amortizare propriu-zisă cât și printr-un termen cvasi-giroscopic.

Căutând soluții de forma

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_0 \\ \zeta_0 \end{Bmatrix} e^{\lambda t},$$

se obține

$$\begin{aligned} (m\lambda^2 + c_r\lambda + k - m\Omega^2)\eta_0 - 2m\Omega\lambda\zeta_0 &= 0, \\ 2m\Omega\lambda\eta_0 + (m\lambda^2 + c_r\lambda + k - m\Omega^2)\zeta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Condiția de a avea soluții nebanale se scrie

$$\begin{aligned} & (m\lambda^2 + c_r\lambda + k - m\Omega^2)^2 + (2m\Omega\lambda)^2 = 0, \\ \text{sau} & (m\lambda^2 + c_r\lambda + k - m\Omega^2)^2 - (i2m\Omega\lambda)^2 = 0, \\ & m\lambda^2 + c_r\lambda + k - m\Omega^2 = \pm i2m\Omega\lambda, \\ & [m\lambda^2 + (c_r + i2m\Omega)\lambda + k - m\Omega^2][m\lambda^2 + (c_r - i2m\Omega)\lambda + k - m\Omega^2] = 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Notând

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2m\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (7.15)$$

ecuația caracteristică devine

$$[\lambda^2 + (2\zeta_r\omega_n + i2\Omega)\lambda + \omega_n^2 - \Omega^2][\lambda^2 + (2\zeta_r\omega_n - i2\Omega)\lambda + \omega_n^2 - \Omega^2] = 0.$$

Din primul factor se poate arăta că, dacă $\zeta_r \ll 1$, rădăcinile sunt

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\zeta_r(\omega_n - \Omega) + i(\omega_n - \Omega), \\ \lambda_2 &= -\zeta_r(\omega_n + \Omega) - i(\omega_n + \Omega), \end{aligned} \quad (7.16, a)$$

iar din al doilea factor

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -\zeta_r(\omega_n + \Omega) + i(\omega_n + \Omega), \\ \lambda_4 &= -\zeta_r(\omega_n - \Omega) - i(\omega_n - \Omega), \end{aligned} \quad (7.16, b)$$

Raza orbitei de precesie este

$$\begin{aligned} \rho &= e^{-\zeta_r(\omega_n - \Omega)t} [C_1 e^{i(\omega_n - \Omega)t} + C_2 e^{-i(\omega_n - \Omega)t}] + \\ &+ e^{-\zeta_r(\omega_n + \Omega)t} [C_3 e^{i(\omega_n + \Omega)t} + C_4 e^{-i(\omega_n + \Omega)t}]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Amplitudinile perechii a doua de precesii scad în timp, pe când variația în timp a amplitudinilor primei perechi de precesii depinde de valoarea relativă a vitezei unghiulare imprimată arborelui Ω față de valoarea pulsației proprii a sistemului când nu se rotește, ω_n . Când Ω este mai mică decât ω_n orbitele precesiilor scad, iar când Ω este mai mare decât ω_n razele orbitelor cresc exponențial în timp; sistemul este instabil.

Din prima ecuație (7.13) formele modale sunt definite de raportul

$$\frac{\zeta_0}{\eta_0} = \frac{\lambda^2 + 2\zeta_r \omega_n \lambda + \omega_n^2 - \Omega^2}{2\Omega \lambda},$$

care, pentru cele două perechi de rădăcini, are valorile

$$\left(\frac{\zeta_0}{\eta_0}\right)_{1,2} = -i, \quad \left(\frac{\zeta_0}{\eta_0}\right)_{3,4} = +i. \quad (7.18)$$

7.2.3.2 În coordonate fixe

În coordonate fixe, ecuațiile pentru același sistem amortizat sunt

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_r & 0 \\ 0 & c_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_r \Omega \\ -c_r \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7.19)$$

Amortizarea rotativă este reprezentată atât printr-un termen de amortizare propriu-zisă cât și printr-un termen circulator definit de o matrice antisimetrică.

Căutând soluții de forma

$$\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} e^{\lambda t}, \quad (7.20)$$

condiția de a avea soluții nebanale este

$$\left(m\lambda^2 + c_r \lambda + k\right)^2 + (c_r \Omega)^2 = 0,$$

sau

$$\left(m\lambda^2 + c_r \lambda + k\right)^2 - (i c_r \Omega)^2 = 0,$$

care poate fi scrisă

$$\left(m\lambda^2 + c_r \lambda + k - i c_r \Omega\right) \left(m\lambda^2 + c_r \lambda + k + i c_r \Omega\right) = 0. \quad (7.21)$$

Pentru $c_r \ll 2\sqrt{km}$, rădăcinile sunt

$$\lambda_{1,2} = -\zeta_r (\omega_n + \Omega) \pm i \omega_n, \quad \lambda_{3,4} = -\zeta_r (\omega_n - \Omega) \pm i \omega_n, \quad (7.22)$$

unde s-au utilizat notațiile (7.15).

Această analiză maschează importanța sensului vitezei unghiulare de rotație Ω . Pentru Ω în sens pozitiv, unele dintre aceste rădăcini nu există.

Așa cum s-a arătat în Secțiunea 2.3.2.4

$$\text{când } \omega = \omega_n, \quad \lambda = -\zeta_r (\omega_n - \Omega) + i \omega_n, \quad (7.23)$$

$$\text{și când } \omega = -\omega_n, \quad \lambda = -\zeta_r (\omega_n + \Omega) - i \omega_n, \quad (7.24)$$

deci raza orbitei de precesie este

$$r = A e^{-\zeta_r (\omega_n - \Omega)t} e^{i \omega_n t} + B e^{-\zeta_r (\omega_n + \Omega)t} e^{-i \omega_n t}, \quad (7.25)$$

expresie care definește exact aceeași mișcare ca cea descrisă în coordonate rotative.

7.2.3.3 Vitezele unghiulare de precesie

În expresia (7.17), primii doi termeni descriu o precesie *co-rotativă* și o precesie *contra-rotativă*, cu vitezele unghiulare $\pm(\omega_n - \Omega)$ față de sistemul de coordonate în rotație. Față de sistemul de coordonate fixe, acestea sunt precesii *directe*, cu vitezele unghiulare ω_n și respectiv $2\Omega - \omega_n$. Ultimii doi termeni descriu tot o precesie *co-rotativă* și o precesie *contra-rotativă*, cu vitezele unghiulare $\pm(\omega_n + \Omega)$ față de sistemul de coordonate în rotație. Acestea sunt precesii *inverse*, cu vitezele unghiulare $2\Omega + \omega_n$ și $-\omega_n$ față de sistemul de coordonate fixe.

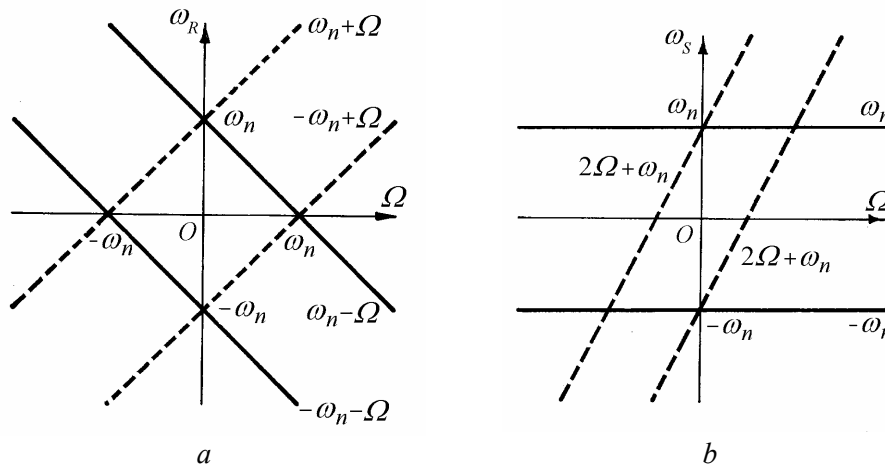


Fig. 7.7 [7.3]

Vitezele unghiulare de precesie, date de partea imaginară a valorilor proprii, sunt reprezentate grafic în funcție de viteza unghiulară de rotație Ω în fig. 7.7. Ele sunt pulsațiile proprii de precesie. Valorile ω_R din fig. 7.7, *a* sunt calculate față de sistemul de coordonate *rotative*, iar valorile ω_S din fig. 7.7, *b* față de sistemul de coordonate *fixe* (*staționare*). De observat că $\omega_S = \omega_R + \Omega$ doar pentru Ω pozitive.

La prima vedere acesta este un rezultat surprinzător. Întrucât s-a considerat amortizare redusă, pulsațiile proprii nu depind de nivelul amortizării. Pentru amortizare nulă, ne-am aștepta să avem rezultatul obținut pentru rotoare

neamortizate, cu viteze unghiulare de precesie $\pm \omega_n$. Figura 7.7, *b* indică încă două pulsații proprii dependente de turație. Ele rezultă din al doilea factor din relația (7.21). Acesta poate fi obținut înlocuind Ω prin $-\Omega$ în primul factor, deci corespunde unui rotor care se rotește în sens contrar. În acest caz $\omega_S = \omega_R - \Omega$.

Această confuzie apare datorită formulării ecuațiilor de mișcare ale sistemului în mărimi reale. Când se utilizează notații reale, imaginea în oglindă a informației din domeniul $-\Omega$ este suprapusă peste cea din domeniul $+\Omega$. Utilizarea notațiilor complexe în locul celor reale elucidează natura valorilor proprii adiționale [7.4]. Prin notația complexă se poate face distincție între un rotor care se rotește în sens pozitiv și un rotor care se rotește în sens negativ. Notația reală dă totdeauna rădăcini complexe conjugate (ecuațiile de mișcare au coeficienți reali), fără să poată face distincția între sensurile de rotație.

Pe de altă parte, interpretarea fizică a vectorilor modali cu elemente complexe, ca în relațiile (7.18), este dificilă. Introducând notația complexă, vectorii modali complecși au forma $\eta_0 + i\zeta_0$ și devin zero pentru modurile asociate cu λ_3 și λ_4 . Aceasta implică faptul că acele moduri există doar din punct de vedere matematic, dar nu vor fi excitate de nici o forță de excitație reală. Aceasta se poate arăta ușor calculând răspunsul forțat, de exemplu, la o forță de mărime constantă care se rotește cu viteză unghiulară constantă față de sistemul de coordonate rotative [7.3].

7.2.4 Efecte cantitative ale amortizării

Pentru modelul de rotor plan, se poate defini un factor de pierderi staționar $\eta_s(\omega)$ egal cu raportul între forța tangențială de rezistență la înaintare datorită amortizării staționare și forța elastică radială, când masa punctiformă parcurge o orbită circulară de rază r cu viteza unghiulară ω . Când $\omega = \omega_n$, forța de rezistență la înaintare D_s datorită amortizării staționare este

$$D_s = \eta_s(\omega_n) k r . \quad (7.26)$$

“Similar, se definește un factor de pierderi rotativ $\eta_r(\omega)$ egal cu raportul între forța tangențială de rezistență la înaintare datorită amortizării rotative și forța elastică radială, când masa punctiformă parcurge o orbită circulară de rază r cu viteza unghiulară ω , față de sistemul în rotație. Într-o precesie directă cu viteza unghiulară absolută ω_n , viteza relativă față de sistemul care se rotește cu Ω este $\omega_n - \Omega$. Astfel, când sistemul se rotește supracritic, forța de rezistență la înaintare D_r datorită amortizării rotative este în sensul mișcării și de mărime

$$D_r = \eta_r(\Omega - \omega_n) k r \quad (7.27)$$

pentru o orbită de rază r .”

“Dacă $D_r = D_s$, rezultă o orbită de rază constantă r . Dacă $D_r < D_s$, apare o încetinire netă și energia mișcării pe orbită scade. Dacă $D_r > D_s$, apare o accelerare netă și energia mișcării pe orbită crește.”

“Cu alte cuvinte, stabilitatea este decisă de mărimile relative ale factorilor de pierderi rotativ și staționar, așa cum se arată în fig. 7.8. Pragul de stabilitate apare când cei doi factori de pierderi sunt egali

$$\eta_r(\Omega - \omega_n) = \eta_s(\omega_n). \quad (7.28)$$

Precesia directă este instabilă la viteze unghiulare de rotație Ω supracritice, la care factorul de pierderi al amortizării rotative este mai mare decât factorul de pierderi al amortizării staționare.”

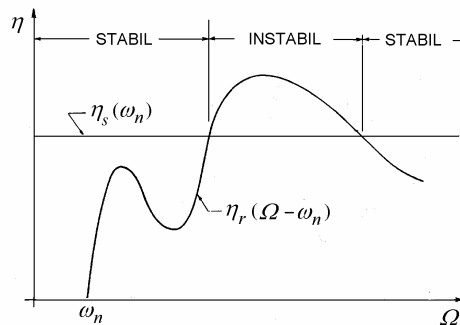


Fig. 7.8 [7.2]

Vitezele unghiulare de rotație Ω care satisfac (7.28) sunt determinate de dependența de frecvență a mecanismului amortizării rotative și de nivelul amortizării staționare.

7.3 Precesia instabilă în lagăre hidrodinamice

O formă bine cunoscută de instabilitate a unui rotor, denumită *oil whirl* (precesie datorită uleiului) sau precesie de semifrecvență, este o precesie autoexcitată produsă de forțele neliniare generate în pana de ulei a lagărelor radiale hidrodinamice. Precesia rezonantă (*oil whip*) apare la frecvența corespunzătoare turației critice minime și se menține la frecvența respectivă când turația crește. Atât fenomenul de *oil whirl* cât și cel de *oil whip* se suprapun peste precesia sincronă datorită dezechilibrului masic. Amplitudinile precesiei datorită uleiului sunt de obicei reduse. La precesia rezonantă amplitudinile sunt mai mari și de obicei depășesc jocul în lagăr. Apariția *oil whip*-ului trebuie să declanșeze oprirea imediată a mașinii.

7.3.1 Fenomenele “oil-whirl” și “oil-whip”

Următoarea descriere este o adaptare după [7.5].

Când arborele începe să se rotească cu o turație lent crescătoare, în tot lungul axei rotorului se observă o mișcare de precesie sincronă cu amplitudine mică (notată 1X). Aceasta este produsă de dezechilibrul rezidual inerent rotorului. La turații mici, această precesie este stabilă. O perturbație de tip impuls produce o precesie pe o orbită tranzitorie, după care rotorul revine la orbita staționară (fig. 7.9).

La turații mai mari (de obicei inferioare primei turații critice) precesia sincronă forțată nu mai este singurul regim de vibrații. Pe lângă componenta 1X apare precesia datorită uleiului (*oil whirl*).

Oil whirl este o precesie subarmonică directă de încovoiere a rotorului, în jurul centrului lagărului, la o frecvență apropiată de jumătatea frecvenței corespunzătoare rotației. În acest domeniu de turații, rotorul se comportă ca un corp rigid. Amplitudinile mișcării de *oil whirl* sunt de obicei mult mai mari decât cele ale precesiei sincrone. Ele sunt, totuși, limitate de jocurile din lagăre și de forțele neliniare transmise de fluid.

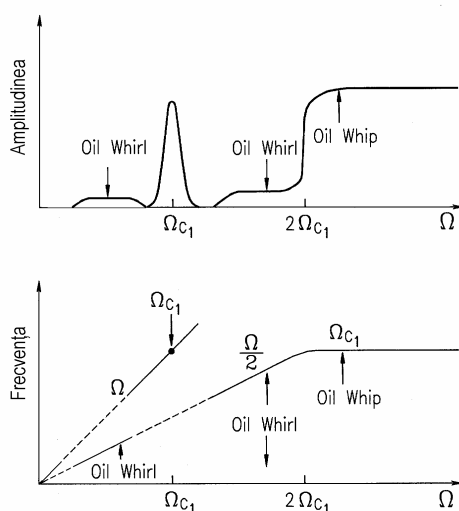


Fig. 7.9 [7.5]

La creșterea turației, caracteristicile precesiei nu se modifică. Frecvența mișcării de *oil whirl* urmărește turația în creștere, menținând raportul $\approx 1/2$ față de aceasta. Amplitudinea razelor de precesie rămâne aproape constantă și de obicei mare. În lagăre, raza precesiei poate ajunge la nivelul jocului în lagăr. În domeniul considerat de turații, efectele dinamice ale fluidului din lagăre sunt dominante. Precesia sincronă forțată reprezintă doar o mică parte a răspunsului dinamic, după cum arată semi-spectrul din fig. 7.10.

Când turația în creștere se apropie de prima viteză unghiulară critică Ω_{c1} , adică de prima pulsație proprie a rotorului, mișcarea de *oil whirl* devine brusc instabilă și dispare, fiind anulată și înlocuită de precesia sincronă în creștere. Precesia forțată domină, atingând raza maximă la frecvența de rezonanță care corespunde proprietăților de masă/rigiditate/amortizare ale rotorului. Forțele dinamice ale fluidului din lagăre dau acum prioritate efectelor mecanice ale rotorului elastic.

Deasupra primei turații critice, amplitudinea precesiei sincrone scade și forțele fluidului din lagăre revin în acțiune. Cu creșterea turației, imediat peste prima turație critică, mișcarea de *oil whirl* apare din nou. Precesia are aspectul descris anterior. Lățimea domeniului de turații în care amplitudinea precesiei sincrone este dominantă depinde de dezechilibrul rotorului: cu cât dezechilibrul este mai mare, cu atât acest domeniu este mai extins [7.4].

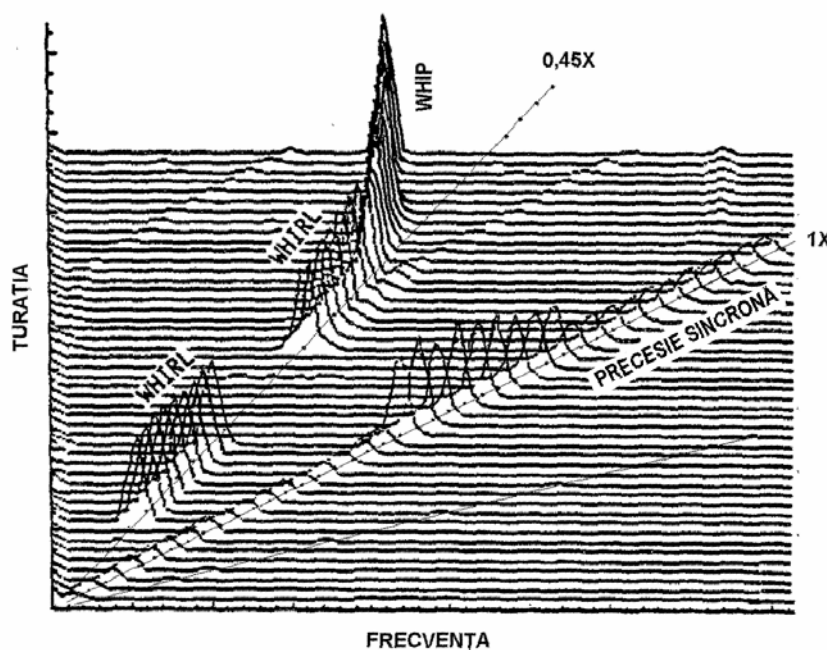


Fig. 7.10 [7.5]

Când viteza unghiulară a rotorului atinge aproximativ dublul primei viteze unghiulare critice sincrone $2\Omega_{c1}$, frecvența mișcării de *oil whirl* devine egală cu prima pulsație proprie a rotorului. Mișcarea de *oil whirl* este înlocuită de *oil whip* – o precesie directă subarmonică a rotorului numită *precesia rezonantă*. Rotorul continuă precesia violentă cu frecvența și forma modală ale primei turații critice, chiar dacă turația crește în continuare. Precesia rotorului “se calează” pe frecvența primei turații critice sincrone chiar dacă turația este mărită.

În acest domeniu de turații mari, arborele nu mai poate fi considerat rigid. Flexibilitatea acestuia produce o cuplare puternică a rotorului cu lagărele. Parametrii de masă și rigiditate ai rotorului devin factorii dinamici predominanți. Amplitudinea precesiei rezonante a fusului este limitată de jocul în lagăr, însă raza orbitei arborelui poate crește foarte mult, deoarece precesia are loc la frecvența proprie a arborelui, deci în condiții de rezonanță. Fenomenele descrise mai sus pot lua diferite forme în diferite mașini echipate cu lagăre cu film fluid și/sau etanșări.

De la descoperirea lor (B. L. Newkirk și H. D. Taylor, 1925) s-au făcut progrese importante în explicarea mișcărilor de *oil whirl* și *oil whip*, dar fenomenul este încă incomplet înțeles. “Ceea ce este clar, este că atunci când viteza rotorului pe orbita precesiei este mai mică decât viteza medie a filmului de ulei, uleiul se opune mișcării rotorului și generează o forță de rezistență la înaintare. Aceasta este amortizarea pozitivă. Când viteza pe orbita precesiei este mai mare decât viteza medie a filmului de ulei, uleiul împinge rotorul. Aceasta este amortizarea negativă. La apariția amortizării negative rotorul devine instabil și o mică perturbație va face ca fusul să înceapă o precesie subsincronă cu amplitudine crescătoare. Cu creșterea razei mișcării fusului, amortizarea devine pozitivă, amplitudinea descrește și mișcarea revine la o orbită limită stabilă. Acesta este *oil whirl*-ul. Scenariul este coerent cu asimilarea mișcării de *oil whirl* cu un fenomen neliniar de tip Van der Pol” [7.6].

“Ceea ce este mai puțin clar, este cum se transformă mișcarea de *oil whirl* în *oil whip*. Aparent, pe măsura apropierii de prima turație critică, pulsația mișcării pe orbita limită se sincronizează cu Ω_{c_1} , și rămâne blocată pe Ω_{c_1} , cât timp Ω este mai mare decât aproximativ $2\Omega_{c_1}$. Dacă Ω continuă să crească, este posibil ca *oil whip*-ul să dispară și să reapară *oil whirl*-ul” [7.6].

7.3.2 Precesia la semifrecvență

Se consideră un lagăr radial încărcat ușor, în care presiunea produsă în filmul de ulei este neglijabilă, centrul fusului este aproape de centrul lagărului și excentricitatea este foarte mică față de jocul radial. Deoarece curgerea produsă de gradientul de presiune este presupusă neglijabilă, viteza în filmul de lubrifianț variază liniar pe grosime, cu o valoare maximă $R\Omega$ la suprafața fusului (fig. 7.11).

Debitul la intrarea în pana de ulei este

$$q_i = \frac{1}{2}LR\Omega(C + e). \quad (7.29)$$

Debitul la ieșirea din pana de ulei este

$$q_o = \frac{1}{2}LR\Omega(C - e). \quad (7.30)$$

Dacă în filmul de ulei se dezvoltă presiune, când lagărul funcționează în regim staționar, debitul la intrare este micșorat iar debitul la ieșire este mărit de curgerea produsă de gradientul de presiune, care echilibrează q_i și q_o pentru a menține continuitatea curgerii. Totuși, dacă încărcarea lagărului este mică, pentru a menține echilibrul curgerii, în lipsa presiunii se produce o mișcare de precesie.

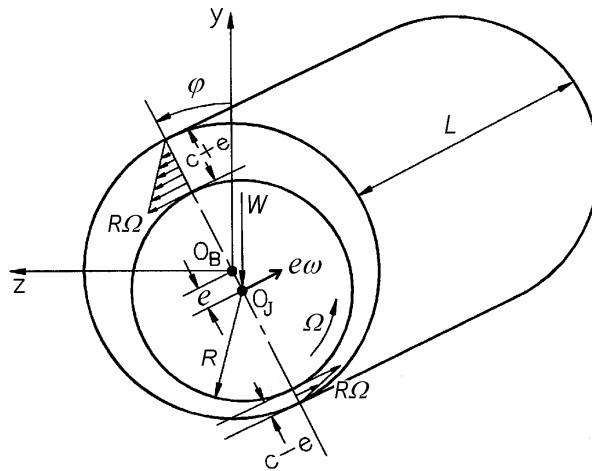


Fig. 7.11 [7.7]

Dacă viteza unghiulară instantanee a precesiei centrului fusului O_j este ω , atunci viteza indusă este $e\omega$ (fig. 7.11). Dar ridicând fusul din poziția staționară, creșterea volumului filmului de ulei este

$$V = 2LRe\omega, \quad (7.31)$$

unde $2LR$ este aria suprafeței proiectate a lagărului. Prin urmare

$$\frac{1}{2}LR\Omega(C+e) = \frac{1}{2}LR\Omega(C-e) + 2LRe\omega \quad (7.32)$$

și

$$\omega = \frac{1}{2}\Omega. \quad (7.33)$$

Pentru a menține echilibrul curgerii, rotorul este antrenat într-o mișcare de precesie având pulsația egală cu jumătatea vitezei unghiulare de rotație.

Dacă $\omega > \frac{1}{2}\Omega$, debitul la ieșire este mai mare, deci în filmul de ulei se dezvoltă presiune și lagărul devine stabil. Dacă însă $\omega < \frac{1}{2}\Omega$, debitul la intrare este mai mare, lagărul își pierde capacitatea portantă și continuă mișcarea de precesie,

pentru a crea mai mult spațiu pentru uleiul în exces, care intră în pana de ulei. Pierzând capacitatea portantă rotorul devine instabil. S-a observat că la rotoare reale frecvența precesiei este 0,46 - 0,48 din frecvența corespunzătoare rotației.

7.3.3 Turația de apariție a instabilității

Pentru a descrie apariția instabilității, lagărul radial poate fi reprezentat printr-un singur coeficient de rigiditate efectiv și un singur coeficient de amortizare efectiv. Acești coeficienți pot fi calculați pe baza celor opt coeficienți dinamici ai lagărului. Totuși, cei doi coeficienți astfel calculați sunt funcție de frecvența precesiei. Coeficientul de amortizare efectiv este negativ la frecvențe joase și devine pozitiv la frecvențe mai mari. Frecvența la care amortizarea devine zero se numește frecvența instabilității. Aceasta poate fi calculată în funcție de turație și reprezentată prin curba corespunzătoare din fig. 7.12. Linia precesiei sincrone intersectează curba frecvenței proprii la prima turație critică (unde frecvența corespunzătoare turației este egală cu frecvența proprie a sistemului). Linia precesiei de semifrecvență intersectează curba frecvenței proprii la limita de stabilitate numită *oil whip*.

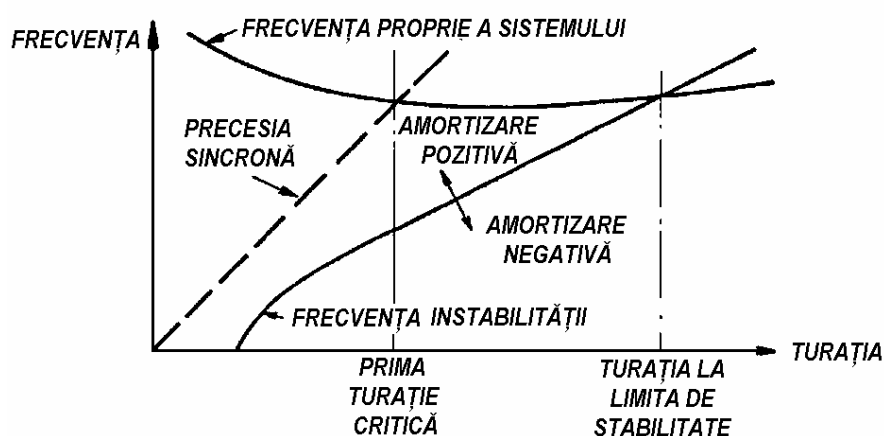


Fig. 7.12 [7.8]

La frecvențe mai mici decât frecvența instabilității (adică în regiunea de sub curbă) amortizarea efectivă este negativă iar la frecvențe mai mari decât frecvența instabilității amortizarea este pozitivă. Elasticitatea efectivă a lagărului împreună cu flexibilitatea rotorului determină frecvențele de rezonanță ale sistemului rotor-lagăre. Deoarece rigiditatea lagărului este funcție de turație, frecvențele de rezonanță devin dependente de turație. Cea mai joasă dintre acestea este reprezentată de curba numită "frecvența proprie a sistemului". Această curbă intersectează curba frecvenței instabilității la o turație numită "turația la limita de stabilitate".

Să presupunem că rotorul este supus unei mici perturbații. El va tinde să aibă o precesie la frecvența proprie minimă. Totuși, dacă rotorul lucrează sub turația la limita de stabilitate, lagărele produc amortizare pozitivă și mișcarea de precesie dispare. Pe măsură ce turația crește, amortizarea disponibilă pentru atenuarea precesiei scade până se anulează la turația de apariție a instabilității. Încercarea de creștere a turației peste turația limită face ca amortizarea să devină negativă, astfel încât orice perturbație este amplificată și sistemul este instabil.

Din fig. 7.12 se vede că dacă masa rotorului este mărită sau arborele este flexibilizat, frecvența proprie a sistemului scade, deci intersecția celor două curbe se deplasează spre stânga și turația limită este micșorată. Invers, dacă în sistem există amortizare externă (de exemplu, în rezeme) atunci curba frecvenței instabilității filmului de ulei este deplasată în jos, deci turația limită este mărită. Această ultimă caracteristică sugerează metode de stabilizare a unui sistem instabil și explică de ce, unele mașini, în special pompele de lichide și compresoarele de gaze de înaltă presiune cu etanșări lichide, pot opera stabil mult peste turația limită teoretică. Capacitatea de amortizare a lichidului cere trece prin roțile centrifuge sau etanșări acționează ca o amortizare externă față de sistem și stabilizează rotorul.

7.3.4 Explicația lui Crandall privind instabilitatea lagărelor autoportante

Într-un al doilea articol memorabil [7.9] Stephen Crandall a dat o explicație simplă instabilității unui lagăr hidrodinamic, bazată pe o ipoteză euristică. Lagărul radial cu fluid este considerat o pompă care circulă fluidul prin interstițiul inelar dintre fus și lagăr. Mișcarea de precesie a fusului produce o undă de variație a grosimii filmului care se propagă în jurul canalului. Curgerea fluidului produce precesia fusului când viteza medie a fluidului pompat este mai mare decât viteza periferică a undei de variație a grosimii. Pentru lagăre lungi necavitate, ipoteza prezice corect apariția instabilității pentru lagăre neîncărcate, însă pe măsura creșterii încărcării aceasta prezice turații limită mai mari. În continuare, prezentarea reproduce o mare parte a articolului lui Crandall.

7.3.4.1 Analiza lui Sommerfeld

Pentru simplitate, discuția este centrată pe cazul unui lagăr circular cu cuzinet complet, cu curgere bidimensională necavitate.

Cazul idealizat analizat de Sommerfeld [7.10] în 1904 este schițat în fig. 7.13. Un fus cu raza R se rotește cu viteza unghiulară constantă Ω într-un lagăr circular cu cuzinet complet, de rază $R + C$, unde jocul radial C este foarte mic în comparație cu R . În spațiul inelar dintre fus și lagăr există un lubrifianț fluid incompresibil, cu vâscozitatea constantă μ . Curgerea fluidului este considerată bidimensională, adică se neglijează curgerea axială. În plus se consideră că nu apare cavitația. Lățimea lagărului perpendicular pe planul figurii este L .

“Principalul rezultat al lui Sommerfeld este că în poziția de echilibru, sub acțiunea unei sarcini verticale W , fusul este deplasat excentric pe orizontală o distanță e .“

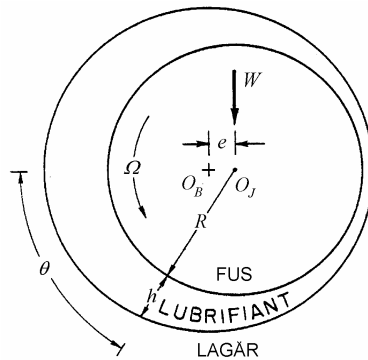


Fig. 7.13 [7.9]

“Datorită excentricității e , grosimea filmului h variază cu poziția θ în lungul interstițiului inelar. Pentru $C \ll R$, relația aproximativă este

$$h = C + e \cos \theta = C (1 + \varepsilon \cos \theta), \quad (7.34)$$

în care $\varepsilon = e/C$ este excentricitatea relativă.”

“Presupunând curgere vâscoasă laminară, fără variație a presiunii pe grosimea filmului, singurele profile de curgere care satisfac condițiile Mecanicii fluidelor într-un canal de grosime constantă h sunt combinații ale celor două profile de bază arătate în fig. 7.14. Aici z este distanța în lungul canalului și y este distanța pe lățimea canalului, unde $0 < y < h$.“

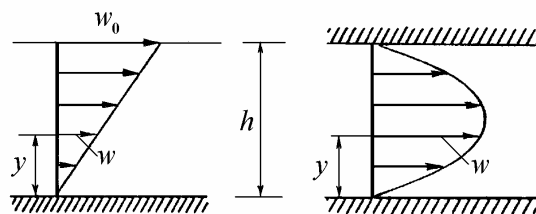


Fig. 7.14 [7.9]

“Viteza fluidului (în direcția z , la distanța y) se notează w . Debitul volumic printr-o secțiune a canalului de lățime L perpendiculară pe planul figurii se notează Q iar $\partial p / \partial z$ este gradientul presiunii în lungul canalului. Pentru un profil de viteze liniar ca în stânga fig. 7.14, distribuția depinde de parametrul w_0 , viteza peretelui superior al canalului (viteza peretelui inferior se consideră zero).

Se poate arăta că

$$w = w_0 \frac{y}{h}, \quad Q = w_0 \frac{Lh}{2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (7.35)$$

Pentru profilul parabolic din dreapta figurii 7.14, distribuția depinde de parametrul A , care este o viteză de patru ori mai mare decât viteza maximă a profilului sau de șase ori viteza medie

$$w = A \left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad Q = A \frac{Lh}{6}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -A \frac{2\mu}{h^2}. \quad (7.36)$$

În timp ce relațiile (7.35) și (7.36) sunt strict corecte pentru curgeri staționare cu valori constante ale parametrilor h , w_0 , și A , teoria lubrificației a lui Reynolds extinde aceste relații pentru a ține cont de mici variații, atât în timp, t , cât și în spațiu, z , ale acestor parametri.

Calculate pentru lagărul din fig. 7.13, curgerile componente din fig. 7.14 se suprapun, cu $z = R\theta$ și $w_0 = R\Omega$, cu h dat de (7.34) și cu parametrul nedeterminat A urmând a fi stabilit prin condiția de continuitate $\partial Q / \partial \theta = 0$ și unicitatea presiunii $p(\theta) = p(\theta + 2\pi)$. Valoarea lui A astfel determinată este

$$A_1 = R\Omega \left[\frac{6(1-\varepsilon^2)}{2+\varepsilon^2} \frac{1}{1+\varepsilon \cos \theta} - 3 \right] \quad (7.37)$$

iar debitul volumic total este

$$Q_1 = R\Omega LC \frac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2}. \quad (7.38)$$

Gradienții de presiune ai componentelor curgerii din fig. 7.14 sunt suprapuși și integrați pentru a obține distribuția presiunii $p(\theta)$ care acționează asupra fusului. Rezultanta presiunilor care acționează pe lățimea L a fusului este o forță care acționează vertical în sus prin centrul fusului O_J , de mărime

$$W_1 = 12\pi\mu LR\Omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}}. \quad (7.39)$$

Tensiunile de forfecare vâscoasă care acționează asupra periferiei fusului produc de asemenea o forță rezultantă asupra fusului, dar aceasta este mai mică decât rezultanta presiunii (7.39) cu un factor de ordinul C/R , și astfel poate fi neglijată. Pentru ca fusul să fie în echilibru, forța (7.39) trebuie să fie egală și de sens opus forței aplicate W .”

“Proprietatea remarcabilă a modelului de lagăr Sommerfeld este că deplasarea la echilibru este perpendiculară pe sarcina aplicată. Această caracteristică implică faptul că un lagăr neîncărcat este instabil față de mișcări lente de precesie directă a fusului.

Pentru a realiza aceasta, să ne imaginăm că un agent extern deplasează centrul fusului O_J din fig. 7.13 pe o orbită circulară de rază e în sens contrar acelor de ceasornic în jurul centrului lagărului O_B . Când fusul trece prin poziția arătată în fig. 7.13, dacă mișcarea este suficient de lentă, curgerea lubrifianului și distribuția presiunii vor fi ca în configurația de echilibru arătată în figură. Înseamnă că fluidul va acționa asupra fusului cu o forță sensibil egală cu W și de sens contrar. Această forță, dirijată în același sens ca viteza centrului fusului O_J pe orbita sa circulară, efectuează lucru mecanic asupra mișcării de precesie. Lagărul Sommerfeld produce astfel instabilitatea precesiei pentru viteze de precesie directă foarte mici. Pentru a considera viteze de precesie mai mari, analiza lui Sommerfeld trebuie extinsă pentru a include mișcarea centrului fusului O_J .”

7.3.4.2 Stabilitatea precesiei în lagărul neîncărcat

“Conform expresiei (7.39), poziția de echilibru pentru un lagăr neîncărcat ($W = 0$) are excentricitate zero ($\varepsilon = 0, e = 0$). În această configurație, parametrul A_1 din expresia (7.37) se anulează și distribuția vitezelor în filmul de lubrifian are profilul liniar din stânga figurii 7.14.”

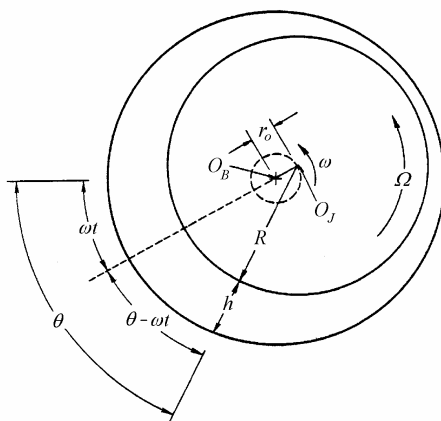


Fig. 7.15 [7.9]

“Cinematica lagărului este prezentată în fig. 7.15 pentru cazul când centrul fusului O_J are o mișcare de precesie cu viteza unghiulară ω , pe un cerc de rază r_0 , în jurul poziției de echilibru în care punctele O_J și O_B coincid. Se observă că

secțiunile diametral opuse, în care filmul de ulei are grosime maximă și respectiv minimă, se rotesc în jurul lagărului cu viteza unghiulară ω . În secțiunea θ , grosimea filmului este

$$h(\theta, t) = C + r_0 \cos(\theta - \omega t). \quad (7.40)$$

Dependența lui h de coordonata spațială θ , și de timpul t , este cea a unei unde progresive, care se propagă în canalul inelar cu viteza unghiulară ω sau cu viteza de fază liniară $R\omega$.

Abordarea lui Newkirk și Taylor [7.11] se bazează pe aplicarea condiției de continuitate a curgerii într-un canal a cărui grosime variază după legea (7.40). Condiția de continuitate aplicată unui arc infinitesimal de lungime $R d\theta$ este

$$\frac{\partial Q}{R \partial \theta} + L \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (7.41)$$

Newkirk și Taylor au presupus că profilul de viteze al curgerii lubrifiantului este liniar (fig. 7.14), astfel încât $Q = R \Omega L h / 2$, deci (7.41) devine

$$\frac{\Omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (7.42)$$

Înlocuind $h(\theta, t)$ din (7.40) în (7.42), rezultă condiția de satisfacere a continuității

$$\omega = \frac{\Omega}{2}. \quad (7.43)$$

Newkirk și Taylor au folosit acest rezultat ca o verificare analitică a fenomenului precesiei la semifrecvență observat la un arbore vertical care funcționa într-un lagăr alimentat cu mult ulei. Rezultatul a explicat și vârful de “rezonanță datorită uleiului” care a apărut în răspunsul unui rotor la o turație egală cu dublul celei corespunzătoare frecvenței proprii a sistemului. Rezultatul simplu (7.43) a fost mai puțin satisfăcător în explicarea fenomenului de *oil-whip*, în care frecvența precesiei rămâne la frecvența proprie chiar când viteza unghiulară de rotație Ω crește, deși s-a observat că fenomenul a apărut totdeauna la turații egale cu sau mai mari decât dublul turației corespunzătoare frecvenței proprii.”

În ipoteza euristică a lui Crandall [7.2], fusul în rotație este considerat a fi roata unei pompe care menține profilul liniar de viteze al curgerii lubrifiantului când fusul este neîncărcat și centrat. Viteza fluidului variază liniar între $w = 0$ la cuzinet și $w = R\Omega$ la fus. Această curgere poate fi descompusă într-o curgere medie, cu viteza constantă $w = R\Omega/2$ și fără rotație, plus o curgere reziduală, cu viteza medie zero și componenta de rotație importantă. Curgerea medie se presupune că alimentează (sau reduce) micile perturbații de precesie ale configurației (de echilibru) centrate. Dacă se impune o precesie care presupune o undă de variație a grosimii de forma (7.40), ipoteza lui Crandall postulează că, dacă viteza curgerii

medii $R\Omega/2$ este mai mare decât viteza de fază $R\omega$ a precesiei în jurul periferiei filmului de ulei, atunci se pompează energie în mișcarea de precesie. Invers, dacă viteza de fază a precesiei este mai mare decât viteza medie a lubrifiantului, atunci se extrage energie din mișcarea de precesie. Stabilitatea neutră apare când aceste viteze sunt egale, deci când $\omega = \Omega/2$. Această ipoteză “explică” astfel precesia la semifrecvență și fenomenul de *oil-whip* la un sistem care are un lagăr neîncărcat și alimentat abundent cu ulei.

Dacă sistemul produce mici constrângeri asupra fusului, mișcarea acestuia va fi determinată în principal de forțele din filmul de fluid care acționează asupra lui. Când se inițiază în mod accidental o precesie de joasă pulsație ($\omega < \Omega/2$), se pompează energie în mișcarea de precesie, accelerând precesia până ω ajunge suficient de apropiată de $\Omega/2$ încât energia pompată în precesie echilibrează pierderile de energie din sistem într-o precesie staționară la “semifrecvență”.

Dacă sistemul produce constrângeri considerabile asupra fusului și permite mișcări de precesie apreciabile la o pulsație proprie, filmul de fluid din lagăr va extrage energie din precesiile accidentale, la o pulsație proprie ω , ori de câte ori $\Omega < 2\omega$. Totuși, când $\Omega > 2\omega$, filmul de ulei va pompa energie într-o astfel de precesie. Fenomenul *oil-whip* apare doar dacă energia furnizată de filmul fluid este suficientă pentru a compensa pierderile din sistem.

Explicațiile precedente sunt incomplete, deoarece nu țin cont de toate cerințele fizice implicate. Ambele se bazează pe profilul de viteze al curgerii staționare centrate și pe cinematica unei mici perturbații a precesiei. Argumentele lui Newkirk și Taylor utilizează explicit condiția de continuitate pentru perturbație dar nu conțin nici o considerație asupra presiunii dezvoltate în filmul de ulei.

Istoric, prima analiză completă dinamică a stabilității precesiei unui lagăr neîncărcat a fost făcută în 1933 de Robertson [7.12]. Expunerea care urmează este o versiune liniarizată a analizei lui Robertson.

Se consideră că precesia definită de excentricitatea r_0 ($r_0 \ll C$) și pulsația ω este o mică perturbație a rotației centrate în care distribuția vitezei este

$$w = R\Omega z/C, \quad 0 < z < C. \quad (7.44)$$

Când fusul are o mișcare de precesie, distribuția vitezelor va fi o suprapunere a celor două profile din fig. 7.14. Pentru a satisface condițiile din fig. 7.15 se consideră

$$w = R\Omega \frac{y}{h} + A \left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad (7.45)$$

unde $h(\theta, t)$ este dată de (7.40) iar A trebuie determinat din condiția de continuitate (7.41) și condiția de valoare unică a presiunii, $p(\theta) = p(\theta + 2\pi)$. Utilizând metoda

perturbațiilor liniare, neglijând termenii de ordinul $(r_0/C)^2$ în comparație cu termenii de ordinul r_0/C , se obține

$$A = -6R \frac{r_0}{C} \left(\frac{\Omega}{2} - \omega \right) \cos(\theta - \omega t). \quad (7.46)$$

Debitul volumic total al filmului de lubrifianț este

$$Q = R\Omega \frac{Lh}{2} - r_0 R \left(\frac{\Omega}{2} - \omega \right) L \cos(\theta - \omega t),$$

$$Q = R\Omega \frac{LC}{2} - r_0 RL\omega \cos(\theta - \omega t). \quad (7.47)$$

Distribuția presiunii se obține integrând gradientul presiunii din expresia (7.36). Reținând termenii până la ordinul întâi în r_0/C rezultă

$$p(\theta, t) - p_0 = 12\mu R^2 \frac{r_0}{C^3} \left(\frac{\Omega}{2} - \omega \right) \sin(\theta - \omega t). \quad (7.48)$$

Forța rezultantă datorită acestor presiuni, care acționează asupra fusului, este orientată la 90° față de deplasarea fusului r_0 și are amplitudinea

$$F = 12\pi\mu r_0 L \frac{R^3}{C^3} \left(\frac{\Omega}{2} - \omega \right). \quad (7.49)$$

Când $\Omega/2 > \omega$, F are același sens ca viteza instantanee V_J a centrului fusului. Rata cu care forțele din filmul fluid efectuează lucru mecanic asupra fusului (adică fluxul de putere spre mișcarea de precesie) este

$$FV_J = 12\pi\mu L \frac{R^3}{C^3} r_0^2 \omega \left(\frac{\Omega}{2} - \omega \right). \quad (7.50)$$

Această analiză arată că amplitudinea A a componentei curgerii cu profil parabolic, presiunea în filmul de fluid, forța rezultantă asupra fusului și fluxul de putere spre mișcarea de precesie sunt toate proporționale cu factorul $(\Omega/2 - \omega)$. Mișcările de precesie lente sunt amplificate iar cele rapide sunt încetinite. Frecvența precesiei la stabilitatea neutră este $\omega = \Omega/2$.

Aceste rezultate pot fi comparate cu cele două argumentări simplificate considerate anterior. Ipoteza lui Newkirk și Taylor că profilul vitezei rămâne liniar este echivalentă cu presupunerea că parametrul A în (7.36) se anulează, ceea ce conform (7.46) implică egalitatea lui ω cu $\Omega/2$. În plus, anularea lui A implică absența unui gradient de presiune și deci absența forței rezultante, astfel încât la

pulsația precesiei $\omega = \Omega/2$ filmul de fluid nu întârzie și nici nu accelerează precesia. Aceasta este condiția de stabilitate neutră.

Ipozeza lui Crandall, conform căreia curgerea medie alimentează mișcarea de precesie ori de câte ori viteza medie a fluidului este mai mare decât viteza de fază a precesiei, este esențial calitativă, fiind echivalentă cu ecuația (7.50) care are caracter cantitativ. Întâmplător, la un lagăr neîncărcat, pulsația precesiei la stabilitate neutră este estimată corect de ipoteza euristică. La lagăre încărcate este dificil de prevăzut cum se poate extinde argumentul lui Newkirk și Taylor pentru a prezice orice pulsație a precesiei la stabilitatea neutră, diferită de $\omega = \Omega/2$. Ipozeza lui Crandall a fost totuși extinsă ușor. Ea nu prezice cu precizie pulsația precesiei la stabilitate neutră dar oferă aproximații utile în cazul încărcărilor moderate.

Utilizând metoda perturbațiilor liniare [7.9] rezultă că pulsația precesiei la stabilitate neutră

$$\omega = \frac{3 + (1 - \varepsilon^2)^2}{9 - (1 - \varepsilon^2)^2} \Omega \quad (7.51)$$

variază de la $\omega = \Omega/2$ la $\varepsilon = 0$ pentru un lagăr neîncărcat, la $\omega \rightarrow \Omega/3$ când încărcarea tinde spre infinit și excentricitatea adimensională ε se apropie de unitate. Variația raportului ω/Ω conform relației (7.51) este reprezentată prin curba A în fig. 7.16.

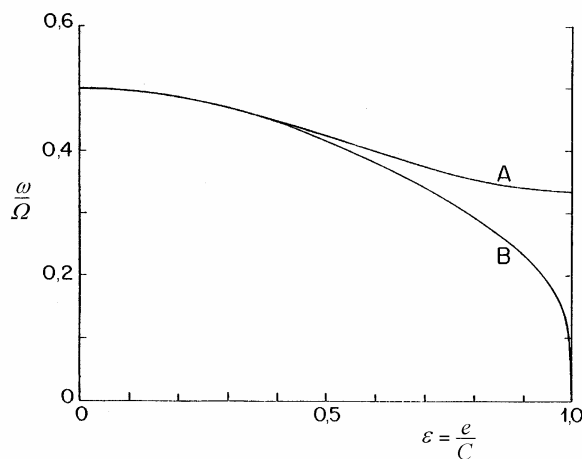


Fig. 7.16 [7.9]

Un calcul bazat pe ipoteza lui Crandall [7.9] conduce la curba B din fig. 7.16. Acesta oferă o aproximație utilă a pulsației precesiei la stabilitatea neutră pentru valori ale excentricității relative în regim staționar mai mici decât $\varepsilon = 0,5$.

7.3.5 Stabilitatea sistemelor liniare

În cazul ecuațiilor de mișcare cu coeficienți reali, ecuația caracteristică

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (7.52)$$

are n rădăcini cu forma generală $\lambda_i = \alpha_i + i\omega_i$. Cazul rădăcinilor multiple nu este studiat aici.

Dacă oricare coeficient $\alpha_i > 0$, sistemul va fi instabil. În Tabelul 7.1 sunt prezentate tipurile de mișcare corespunzătoare poziției unei rădăcini în planul complex (fig. 7.17).

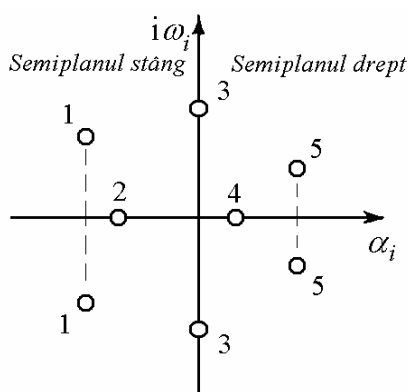


Fig. 7.17 [7.3]

Tabelul 7.1

Poziția rădăcinii în fig. 7.17	Tipul mișcării
1	stabilă; oscilatorie amortizată
2	stabilă; aperiodică amortizată
3	oscilatorie
4	instabilă; divergentă (distanța crește exponențial în timp)
5	instabilă; oscilatorie cu amplitudine crescătoare (instabilă dinamic)

Adesea este util să se decidă dacă un sistem este sau nu este stabil fără a rezolva ecuația caracteristică. În 1877, E. J. Routh a stabilit un algoritm pentru

determinarea numărului rădăcinilor unui polinom real care se află în semiplanul drept. Independent, în 1895, A. Hurwitz a dat o a doua soluție. Inegalitățile cu determinanți stabilite de acesta sunt cunoscute sub numele de *condițiile de stabilitate Routh-Hurwitz*.

Fie matricea cu elemente reale

$$\begin{bmatrix} a_1 & | & a_0 & | & 0 & | & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & & | & & | & & & & & \\ a_3 & & a_2 & | & a_1 & | & a_0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & & | & & & & & \\ a_5 & & a_4 & & a_3 & | & a_2 & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & & & & & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & & \\ a_{2n-1} & & a_{2n-2} & & a_{2n-3} & & & & & & a_n \end{bmatrix}. \quad (7.53)$$

Se construiesc următorii n determinanți indicați prin linii întrerupte

$$D_1 = a_1, \quad (7.54)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0, \quad (7.55)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = -a_1(a_1 a_4 - a_5 a_0) + a_3(a_1 a_2 - a_3 a_0), \quad (7.56)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & . \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & . \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & . \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & . & . & \cdots & a_n \end{vmatrix}. \quad (7.57)$$

Dacă $r > n$ sau $r < 0$ atunci $a_r = 0$. Condiția necesară și suficientă ca toate rădăcinile ecuației $f(\lambda) = 0$ să fie în semiplanul stâng este ca toți determinanții parțiali să fie pozitivi, $D_i > 0$. Dacă $a_n > 0$, este suficient să fie testați doar determinanții de la D_1 la D_{n-1} , deoarece $D_n = a_n D_{n-1}$.

Coeficienții a_r pot fi exprimați în funcție de rădăcinile λ_i ale ecuației (7.52), de exemplu

$$a_1 = -a_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad a_2 = a_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \quad (i \neq j)$$

și așa mai departe. Considerând formele acestor expresii, este ușor de arătat că toți a_i au același semn ca a_0 dacă toate rădăcinile au partea reală negativă. Coeficienții pot fi nuli sau cu semn contrar lui a_0 doar dacă una sau mai multe rădăcini au partea reală pozitivă.

Prin urmare, condiția necesară dar nu suficientă ca toate rădăcinile ecuației $f(\lambda) = 0$ să se afle în semiplanul stâng este ca toți coeficienții a_r ($r = 1, 2, \dots, n$) să fie pozitivi.

7.3.6 Instabilitatea unui rotor rigid simplu

Se consideră un rotor rigid cu masa $2m$ rezemat în două lagăre cu film fluid identice. Datorită simetriei, lagărele au aceeași încărcare, aceeași excentricitate și aceeași coeficienți dinamici. Interesează doar stabilitatea mișcării de translație pură.

7.3.6.1 Turația limită și pulsația precesiei instabile

La încărcare și turație constante, centrul fusului se menține într-o poziție de echilibru staționar în jocul din lagăr, definită univoc de numărul Sommerfeld (6.3)

$$S = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{\mu DL}{W} \left(\frac{R}{C} \right)^2 \quad (7.58)$$

care reprezintă condițiile de funcționare. Considerând că fiecare fus are masa m , ecuația de mișcare față de starea de echilibru se scrie, sub forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix}. \quad (7.59)$$

Înlocuind soluții de forma

$$y = y_0 e^{\lambda t}, \quad z = z_0 e^{\lambda t}, \quad (7.60)$$

în partea omogenă a ecuației (7.59), se obține

$$\begin{bmatrix} m\lambda^2 + c_{yy}\lambda + k_{yy} & c_{yz}\lambda + k_{yz} \\ c_{zy}\lambda + k_{zy} & m\lambda^2 + c_{zz}\lambda + k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7.61)$$

Pentru ca y_0 și z_0 să aibă valori nebanale, se obține ecuația caracteristică

$$(m\lambda^2 + c_{yy}\lambda + k_{yy})(m\lambda^2 + c_{zz}\lambda + k_{zz}) - (c_{zy}\lambda + k_{zy})(c_{yz}\lambda + k_{yz}) = 0. \quad (7.62)$$

Aceasta este o ecuație algebrică de gradul patru, de forma

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (7.63)$$

în care

$$\begin{aligned} a_0 &= m^2, \\ a_1 &= m(c_{yy} + c_{zz}), \\ a_2 &= m(k_{yy} + k_{zz}) + (c_{yy}c_{zz} - c_{yz}c_{zy}), \\ a_3 &= c_{yy}k_{zz} + c_{zz}k_{yy} - (c_{yz}k_{zy} + c_{zy}k_{yz}), \\ a_4 &= k_{yy}k_{zz} - k_{yz}k_{zy}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Condițiile Routh-Hurwitz de stabilitate a precesiei sunt

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad (7.65)$$

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \quad (7.66)$$

$$a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0. \quad (7.67)$$

La apariția instabilității, rădăcina ecuației (7.63) este pur imaginară

$$\lambda = i\omega, \quad (7.68)$$

unde ω este pulsația precesiei.

Înlocuind (7.68) în ecuația (7.63) rezultă

$$a_0\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4 + i(-a_1\omega^3 + a_3\omega) = 0. \quad (7.69)$$

Egalând partea reală și partea imaginară cu zero, se obține

$$a_0\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4 = 0, \quad (7.70)$$

$$\omega(a_3 - a_1\omega^2) = 0. \quad (7.71)$$

Din ecuația (7.71) se obține pulsația precesiei la limita de stabilitate

$$\omega^2 = \left(\frac{a_3}{a_1} \right)_{\Omega=\Omega_{lim}} . \quad (7.72)$$

Înlocuind (7.72) în relația (7.70) rezultă

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 = 0 . \quad (7.73)$$

Aceasta înseamnă că la viteza unghiulară de rotație $\Omega = \Omega_{lim}$ se atinge limita de stabilitate iar pulsația precesiei instabile este dată de expresia (7.72).

De obicei, turația limită și pulsația precesiei sunt exprimate în funcție de cei opt coeficienți dinamici adimensionali ai lagărelor

$$K_{ij} = \frac{C}{W} k_{ij}, \quad C_{ij} = \frac{C \Omega}{W} c_{ij}, \quad i, j = y, z \quad (7.74)$$

în care C este jocul radial, $W = mg$ este sarcina statică pe lagăr și Ω este viteza unghiulară de rotație.

Notând

$$A_1 = C_{yy} + C_{zz}, \quad A_2 = K_{yy} + K_{zz}, \quad A_3 = C_{yy}C_{zz} - C_{yz}C_{zy}, \quad (7.75)$$

$$A_4 = C_{yy}K_{zz} + C_{zz}K_{yy} - (C_{yz}K_{zy} + C_{zy}K_{yz}), \quad A_5 = K_{yy}K_{zz} - K_{yz}K_{zy},$$

și înlocuind (7.74) și (7.75) în (7.64), rezultă

$$a_0 = \left(\frac{W}{g} \right)^2, \quad a_1 = \frac{W^2}{gC\Omega} A_1, \quad a_2 = \frac{W^2}{gC} A_2 + \left(\frac{W}{C\Omega} \right)^3 A_3, \\ a_3 = \frac{W^2}{C^2\Omega} A_4, \quad a_4 = \left(\frac{W}{C} \right)^2 A_5. \quad (7.76)$$

Înlocuind coeficienții (7.76) în relațiile (7.73) și (7.72) se obține viteza unghiulară adimensională de apariție a instabilității

$$\frac{\Omega_{lim}^2}{g/C} = \frac{A_1 A_3 A_4}{A_4^2 + A_1^2 A_5 - A_1 A_2 A_4} \quad (7.77)$$

și pulsația adimensională a precesiei instabile

$$\frac{\omega_{lim}^2}{g/C} = \left(\frac{A_4}{A_1} \right)_{\Omega=\Omega_{lim}} \quad (7.78)$$

În calcule practice, numărul Sommerfeld este calculat la turația de lucru. Dacă turația limită este mai mare decât turația de lucru, sistemul este stabil, în caz contrar este instabil.

7.3.6.2 Masa critică a rotorului

Limita de stabilitate poate fi calculată utilizând nomograme care conțin atât parametrii rotorului cât și cei ai lagărelor.

Dacă rotorul este considerat rigid, acesta este definit de un singur parametru – masa rotorului. În cazul lagărelor cu film fluid incompresibil, în regim laminar, pulsația adimensională a precesiei instabile depinde numai de numărul Sommerfeld S (sau de excentricitatea relativă ε). Se poate deci calcula, la orice număr Sommerfeld (sau excentricitate relativă), masa fusului necesară pentru existența mișcării de precesie.

Masa fusului unui rotor rigid poate fi exprimată printr-un parametru adimensional $Cm\omega^2/W$. Expresia (7.78) poate fi scrisă

$$\frac{Cm\omega^2}{W} = K = \frac{C_{yy}K_{zz} + C_{zz}K_{yy} - (C_{yz}K_{zy} + C_{zy}K_{yz})}{C_{yy} + C_{zz}}, \quad (7.79)$$

unde K este masa adimensională a rotorului într-un lagăr.

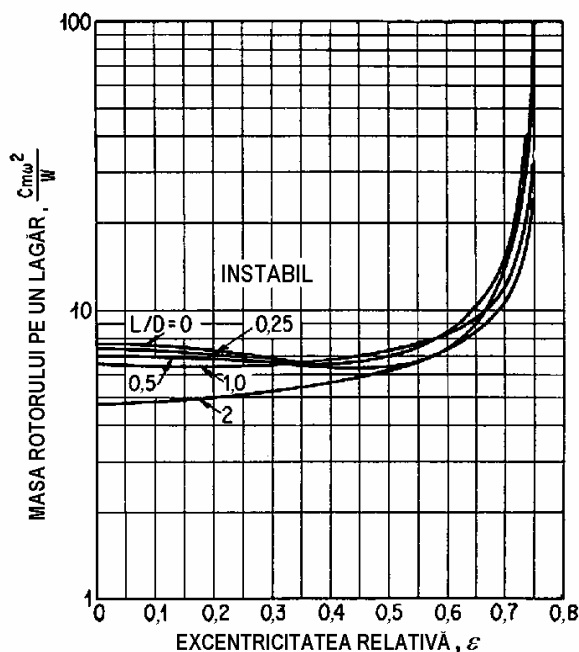


Fig. 7.18 [7.8]

Pentru un rotor care lucrează în lagăre circulare cu cuzinet complet, cu fluid incompresibil, o curbă care exprimă relația între K și ε (fig. 7.18) definește limita de stabilitate. Această curbă poate fi utilizată pentru determinarea turației de apariție a instabilității, dacă se cunoaște variația excentricității relative ε în funcție de turație.

Expresia (7.77) se poate scrie (omițând indicele *lim*)

$$\frac{Cm\Omega^2}{W} = \frac{A_1 A_3 A_4}{A_4^2 + A_1^2 A_5 - A_1 A_2 A_4} = \frac{A_3}{K + \frac{A_5}{K} - A_2} = \frac{K A_3}{A_5 - A_2 K + K^2},$$

$$\Omega \sqrt{\frac{Cm}{W}} = \sqrt{\frac{K A_3}{A_5 - A_2 K + K^2}}$$

sau utilizând (7.58)

$$2\pi S \frac{\sqrt{CmW}}{\mu DL \left(\frac{R}{C}\right)^2} = \sqrt{\frac{K A_3}{A_5 - A_2 K + K^2}}. \quad (7.80)$$

Masa critică adimensională a rotorului poate fi exprimată în funcție de numărul Sommerfeld [7.8] sub forma

$$\frac{\sqrt{CmW}}{\mu DL \left(\frac{R}{C}\right)^2} = \frac{1}{2\pi S} \sqrt{\frac{K A_3}{A_5 - A_2 K + K^2}}. \quad (7.81)$$

În fig. 7.19 se prezintă o nomogramă pentru calculul stabilității unui lagăr circular cu cuzinet complet [7.8]. Masa critică adimensională $\sqrt{CmW} / \mu DL (R/C)^2$ este reprezentată grafic în funcție de numărul Sommerfeld S pentru două valori ale raportului L/D . Un rotor este stabil pentru condiții de funcționare la stânga curbelor.

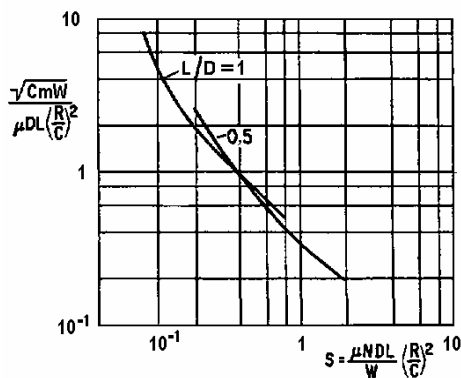


Fig. 7.19 [7.8]

În fig. 7.20 s-a reprezentat variația masei critice adimensionale a rotorului la apariția instabilității în funcție de S . Figura 7.20, a este pentru lagăre eliptice, care lucrează cu lubrifianț incompresibil în regim laminar, iar fig. 7.20, b este pentru lagăre cu cuzinet parțial, cu sarcina la mijlocul lagărului.

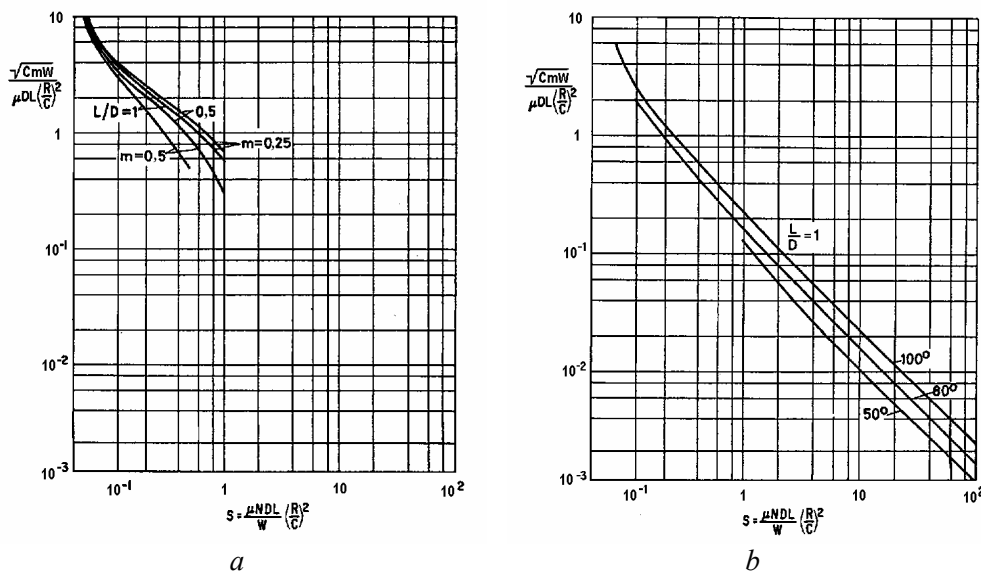


Fig. 7.20 [7.8]

Metoda de determinare a turației limită este următoarea. Se calculează masa adimensională a rotorului $\sqrt{CmW} / \mu DL (R/C)^2$. Din nomogramă se citește valoarea lui S . Turația corespunzătoare numărului Sommerfeld este turația limită, adică turația rotorului la apariția instabilității. Dacă turația de lucru este mai mare decât turația limită atunci rotorul trebuie re-proiectat.

Diagramele presupun că rotorul și pedestalurile sunt rigide. Cu toate acestea, turația limită pentru un rotor flexibil și pedestaluri elastice poate fi calculată aproximativ pe baza acestor nomograme.

7.3.7 Instabilitatea unui rotor elastic simplu

Se consideră un rotor simetric format dintr-un arbore cu rigiditatea $2k$ și o masă concentrată centrală $2m$. Arborele este rezemat la capete în lagăre cu film fluid. Viteza unghiulară de rotație este Ω . Amortizarea externă acționează asupra masei rotorului și în lagăre, fiind definită prin coeficienții de amortizare $2c_e$ și respectiv c_s . Deși rotoarele întâlnite în practică sunt mult mai complicate, modelul simplificat conține caracteristicile esențiale și admite soluții închise [7.13].

7.3.7.1 Rotorul cu amortizare externă

În cazul amplitudinilor mici, notând y, z coordonatele masei rotorului și y_1, z_1 coordonatele fusurilor, ecuațiile mișcării libere se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_e & 0 \\ 0 & c_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \\ = - \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Cei opt coeficienți ai lagărelor depind de geometria acestora și de condițiile de funcționare, exprimate prin numărul Sommerfeld S .

Considerând lagărul circular cu cuzinet complet ca un exemplu reprezentativ și presupunând că lagărul este scurt ($L/D < 1/2$) și lucrează la turații suficient de mari astfel încât

$$2 \left(\frac{L}{D} \right)^2 S > 1, \quad (7.83)$$

coeficienții dinamici ai lagărelor au expresiile aproximative (6.30)

$$\begin{aligned} k_{zz} \cong 2k_{yy} \cong \frac{8}{\pi} \frac{W}{C}, \quad c_{yz} \cong c_{zy} \cong \frac{8}{\pi} \frac{W}{C\Omega}, \\ c_{yy} \cong c_{zz} \cong 2\pi^2 \left(\frac{L}{D} \right)^2 S \frac{W}{\Omega C} = 2\pi\mu L \left(\frac{R}{C} \right)^3 \left(\frac{L}{D} \right)^2, \\ k_{yz} \cong -k_{zy} \cong \pi^2 \left(\frac{L}{D} \right)^2 S \frac{W}{C} = \frac{\Omega}{2} c_{yy}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

La limita de stabilitate, mișcarea este pur armonică cu pulsația ω , astfel că ecuațiile (7.82) se pot scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} k_{yy} + i\omega c_{yy} - X & k_{yz} + i\omega c_{yz} \\ k_{zy} + i\omega c_{zy} & k_{zz} + i\omega c_{zz} - X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7.85)$$

unde

$$X = -\frac{k(-m\omega^2 + i\omega c_e)}{k - m\omega^2 + i\omega c_e} - i\omega c_s, \quad (7.86)$$

$$X = -\frac{k(k - m\omega^2)m\omega^2 - (\omega c_e)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c_e)^2} - i\omega \left[\frac{k^2 c_e}{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c_e)^2} + c_s \right].$$

Această valoare trebuie să fie egală cu rădăcina determinantului ecuației (7.85) care, utilizând (7.84), devine

$$X = \frac{1}{2}(k_{yy} + k_{zz}) + i \left[\omega c_{yy} \pm \sqrt{1 + \frac{(\omega c_{yz})^2 - \frac{1}{4}(k_{yy} - k_{zz})^2}{k_{yz}^2}} \right]. \quad (7.87)$$

Cât timp ω este egală cu sau mai mică decât $\frac{1}{2}\Omega$, al doilea termen de sub radical este de ordinul $(1/4)^2$ și poate fi neglijat. Astfel, cu $k_{yz} = \frac{\Omega}{2}c_{yy}$ din (7.84), X este aproximativ egal cu

$$X = K + i c_{yy} \left(\omega \pm \frac{\Omega}{2} \right), \quad (7.88)$$

unde rigiditatea medie a lagărelor

$$K = \frac{1}{2}(k_{yy} + k_{zz}) = \frac{6}{\pi} \frac{W}{C}. \quad (7.89)$$

Egalând părțile reală și imaginară ale expresiilor (7.86) și (7.88) și neglijând termenul $(\omega c_e)^2$, rezultă pulsația precesiei

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{kK}{m(k+K)}}, \quad (7.90)$$

egală cu pulsația proprie a sistemului când arborele este rezemat în lagăre cu rigiditatea medie K .

Condiția de stabilitate este

$$\omega_0 c_s + \left(\frac{K+k}{k} \right)^2 \omega_0 c_e > \left(\frac{1}{2}\Omega - \omega_0 \right) c_{yy},$$

$$\omega_0 c_s + \left(\frac{K+k}{k}\right)^2 \omega_0 c_e > (\Omega - 2\omega_0) \pi \mu L \left(\frac{R}{C}\right)^3 \left(\frac{L}{D}\right)^2. \quad (7.91)$$

Mișcarea este o precesie directă.

Relația (7.91) arată că, în lipsa amortizării externe, rotorul este instabil când turația depășește dublul primei turații critice. Aceasta este valabil doar pentru valori suficient de mari ale numărului Sommerfeld, după cum inegalitatea se bazează pe mai multe ipoteze. Prin urmare, relația (7.91) este utilizată în primul rând la estimarea nivelului amortizării externe necesar pentru stabilizarea mișcării.

Trebuie adăugat că, în locul introducerii amortizării externe, care acționează direct asupra fusului, o metodă mult mai eficientă pentru stabilizarea precesiei în lagăre hidrodinamice este montarea lagărului într-un suport elastic amortizat. Prin alegerea judicioasă a parametrilor suportului instabilitatea poate fi eliminată complet [7.13].

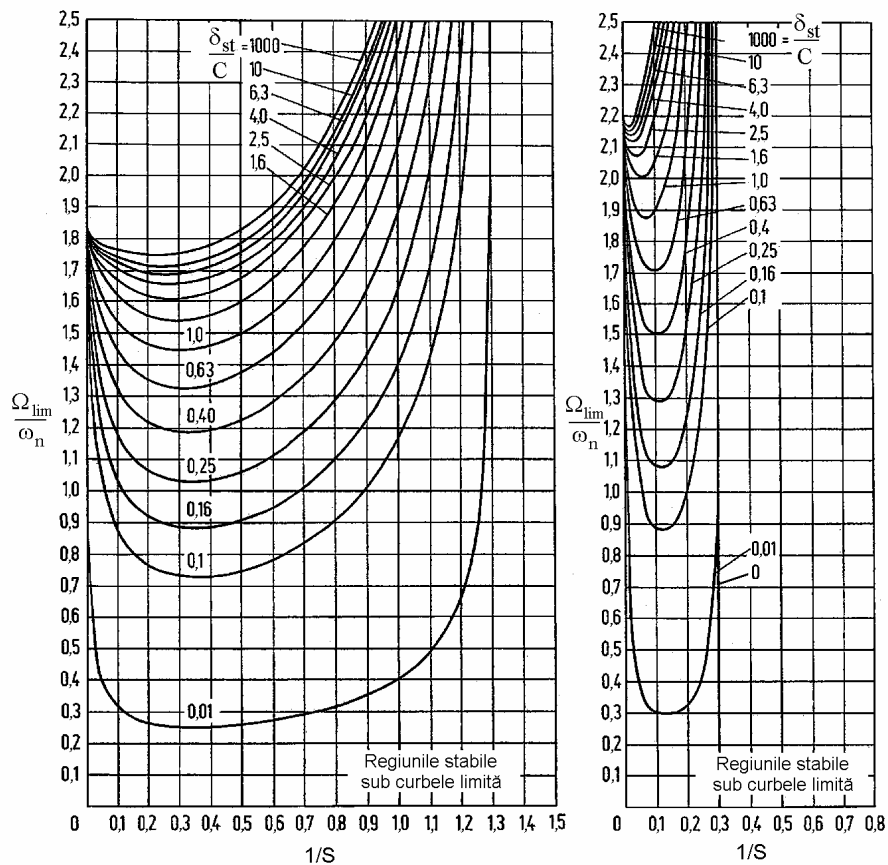


Fig. 7.21 [7.14]

7.3.7.2 Rotor fără amortizare externă

Dacă în rotorul elastic simplu se neglijează amortizarea externă, înlocuind $c_e = 0$ și $c_s = 0$ în (7.86), apoi înlocuind X în (7.85) și nelimitând analiza la lagăre circulare cu cuzinet complet scurte, se obține

$$\frac{\Omega_{lim}^2}{g/C} = \frac{A_3 A_1^2}{1 + \frac{1}{2\pi S} \frac{C}{\delta_{st}} \frac{A_1}{A_4}} \frac{A_1 A_3 A_4}{A_4^2 + A_1^2 A_5 - A_1 A_2 A_4} \quad (7.92)$$

unde $\delta_{st} = \frac{mg}{k}$ este deformația statică a arborelui.

În fig. 7.21 se prezintă diagrame de stabilitate calculate pe baza expresiei (7.92) pentru un lagăr circular și un lagăr eliptic, cu $L/D = 0,8$ și $C/R = 2,1 \cdot 10^{-3}$, al doilea având un joc radial orizontal de trei ori mai mare decât jocul radial vertical.

Măsurile practice de creștere a stabilității peste Ω_{lim} sunt, printre altele, mărirea jocului în lagăre, scăderea vâscozității lubrifianului, scurtarea lagărelor, sau echivalent, introducerea unui șanț circumferențial central pentru ulei, creșterea diametrului arborelui sau micșorarea distanței între lagăre, creșterea amortizării și a anizotropiei rigidității lagărelor, folosirea amortizoarelor cu *squeeze film* și utilizarea lagărelor multilobate sau cu segmenti oscilanți.

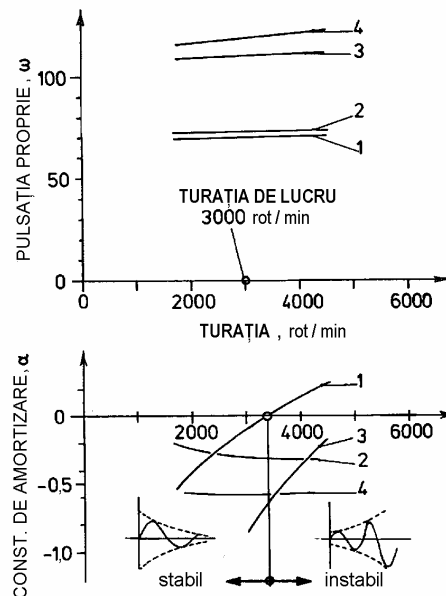


Fig. 7.22 [7.15]

7.3.8 Instabilitatea rotoarelor elastice complexe

Rotoarele elastice complexe pot fi modelate cu elemente finite. Ecuatiile de mișcare conțin matricile sistemului care sunt asamblate utilizând matricile elementelor, așa cum se arată în Capitolul 5.

Studiul precesiei libere conduce la o problemă de valori și vectori proprii, cu valori proprii dependente de turație. Diagrama Campbell (fig. 7.22, *a*) prezintă pulsațiile proprii de precesie în funcție de turație. În diagrama de stabilitate (fig. 7.22, *b*) se reprezintă partea reală a valorilor proprii în funcție de turație. “Turația la apariția instabilității” se determină la intersecția unei curbe cu axa turațiilor. Problema este descrisă în detaliu în Capitolul 4.

7.4 Interacțiunea cu forțele produse de curgerea fluidului

Orice mișcare de precesie a arborelui unei mașini rotative (turbină, compresor, pompă) afectează câmpul de curgere al fluidului de lucru, producând forțe și momente. Apare astfel un cuplaj între mișcarea arborelui și forțele de reacțiune aerodinamice/hidrodinamice, care poate fi destabilizator.

Un mecanism de producere a unui astfel de cuplaj, postulat de Thomas [7.16] și Alford [7.17], apare la mașini cu curgere axială a fluidului de lucru, în care o deplasare radială a centrului roții unei trepte produce o forță transversală, proporțională cu deplasarea. Acesta este cunoscut sub numele de “precesie datorită aburului” (*steam whirl*) sau “efectul jocului la capătul paletelor” (*blade-tip-clearance effect*).

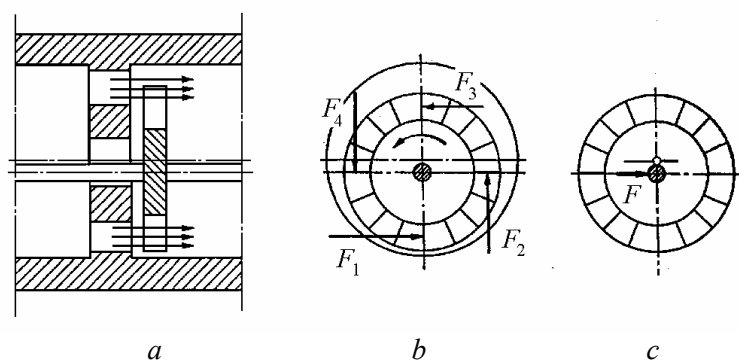


Fig. 7.23 [7.14]

7.4.1 Instabilitatea datorită curgerii aburului la capetele paletelor

Într-o treaptă a unei mașini cu curgere axială a fluidului de lucru (fig. 7.23, *a*), o deplasare radială (în jos) va micșora jocul radial într-o parte a discului paletat

(jos) și va mări jocul radial în partea opusă (sus). Zona cu joc mai mic va funcționa cu randament mai mare și va fi mai încărcată decât zona cu joc mărit.

În partea de jos va acționa o forță orizontală F_1 mai mare, iar în partea de sus o forță orizontală de sens contrar F_3 mai mică. Forțele verticale laterale F_2 și F_4 vor avea amplitudini intermediare (fig. 7.23, b). Rezultanta acestora este o forță tangențială F (fig. 7.23, c) care, dacă este mai mare decât forța de amortizare externă, poate produce o precesie în sensul rotației rotorului (o precesie directă).

Se admite că forța transversală este proporțională cu deplasarea radială a centrului roții. Coeficientul de proporționalitate are forma [7.13]

$$\chi = -\frac{d\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)}{d\left(\frac{h}{H}\right)} \frac{T_0}{2rH}, \quad (7.93)$$

unde η este randamentul treptei, T este cuplul produs pe treaptă, r este raza medie a paletelor, H este înălțimea canalului dintre palete, h este jocul la vârful paletelor, iar indicele 'o' denotă poziția centrică.

Se consideră un rotor simetric, format dintr-un arbore cu rigiditatea $2k$ și o masă concentrată la mijloc $2m$. Arborele este rezemat la capete în lagăre cu rigiditatea k_B astfel încât pulsația proprie neamortizată a sistemului se obține din (7.90) înlocuind $K = k_B$. Viteza unghiulară de rotație este Ω . Amortizarea externă acționează asupra masei rotorului și în lagăre, cu coeficienții de amortizare $2c_e$ și respectiv c_B .

Presupunând că masa centrală a rotorului este un disc paletat de turbină, cu y, z coordonatele masei rotorului și y_1, z_1 coordonatele arborelui în dreptul reazemelor, ecuațiile mișcării libere sunt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_e & 0 \\ 0 & c_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \chi \\ -\chi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \\ = -\begin{bmatrix} c_B & 0 \\ 0 & c_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} k_B & 0 \\ 0 & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Neglijând termenii de ordinul doi în χ , c_e și c_B , ecuația caracteristică devine

$$m\lambda^2 + \left[c_e + \left(\frac{k}{k+k_B} \right)^2 c_B \right] \lambda + \frac{kk_B}{k+k_B} \pm i\chi = 0. \quad (7.95)$$

Egalând λ cu $i\omega$ la limita de stabilitate, se obține pulsația precesiei (7.90)

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{kk_B}{m(k+k_B)}},$$

în timp ce condiția de stabilitate devine

$$\omega_0 c_e + \left(\frac{k}{k+k_B} \right)^2 \omega_0 c_B > |\chi|. \quad (7.96)$$

La apariția instabilității, mișcarea este o precesie directă când χ este pozitiv, și precesie inversă când χ este negativ.

Dacă momentul (cuplul) încărcării aerodinamice T dintr-o treaptă crește cu turația, atunci relația (7.96) arată că poate exista o turație de apariție a instabilității peste care inegalitatea nu mai este satisfăcută. Această turație limită este dependentă de sarcină, astfel încât instabilitatea este “declanșată” la un anumit nivel de putere. Ea poate fi mărită rigidizând arborele sau măbind amortizarea. Este cunoscut faptul că măbind rigiditatea suportului lagărelor de obicei reduce coeficientul efectiv de amortizare și adesea are un efect foarte mic asupra turației critice. Astfel, în practică, parametrul cel mai susceptibil de modificat pentru îmbunătățirea stabilității este amortizarea suportului lagărelor.

Există dovezi că forma propusă de interacțiune între rotor și fluidul de lucru este în concordanță calitativă cu experiența practică, însă expresia lui χ (7.93) corespunde unui singur mecanism special al interacțiunii. Deși relația pare să dea valori corecte ca ordin de mărime, există indicii care sugerează că, în afara cuplului, aceeași importanță pot avea debitul fluidului și nivelul presiunii [7.13].

7.4.2 Interacțiunea roată-difuzor

Forțele hidraulice care acționează asupra rotorului unei pompe centrifuge se manifestă în două moduri diferite. În primul caz, când centrul arborelui este fixat, forțele radiale apar ca rezultat al distribuției presiunii statice și a acțiunii fluidului de lucru. Acestea se numesc *forțe de excitație staționare*. În al doilea caz, atunci când centrul arborelui are o mișcare de precesie, se produc forțe adiționale datorită interacțiunii între roata centrifugă și fluidul înconjurător. Acestea sunt *forțe dinamice* și sunt descrise prin coeficienți dinamici.

Când rotorul se deplasează excentric în interiorul pompei, se dezvoltă forțe importante: a) în etanșările inelare; b) între discul de acoperire al roții și stator; c)

între discul de bază al roții și stator; și d) între roată și difuzor. Când un arbore este deplasat lateral într-o etanșare inelară, datorită căderilor de presiune diferite din interstițiu se produce o forță de readucere puternică. Această forță *hidrostatică* crește cu căderea axială de presiune și cu amplitudinea mișcării laterale a arborelui. Ca urmare, interstițiul acționează ca un arc. Fenomenul, cunoscut ca *efectul Lomakin*, este prezentat în Secțiunea 6.10.1.

La un arbore în mișcare de precesie, *forța tangențială destabilizatoare* este perpendiculară pe deplasarea radială a arborelui, producând o rigiditate de cuplaj transversal, aproximativ proporțională cu viteza circumferențială medie a fluidului. În funcție amplasarea în pompă, apar variații importante ale vitezei circumferențiale de intrare în etanșările inelare. Pentru a reduce drastic această viteză, la intrarea în etanșări se utilizează bușe cu șicane radiale. Viteza circumferențială medie poate fi redusă și prin creșterea deliberată a rugozității statorului.

Cercetări recente au arătat că discurile de acoperire ale roților dezvoltă forțe destabilizatoare importante. Considerații privind conservarea impulsului în scăpările inverse, radial față de discul de acoperire, pot genera viteze circumferențiale mari ale curgerii la intrarea în etanșările inelare de la intrarea în roată sau de la pistonul de echilibrare a presiunii. Jocurile mărite ale etanșării de ieșire, datorite uzurii sau deteriorării, măresc viteza circumferențială față de discul de acoperire și la intrarea în etanșare. Forțele laterale care acționează asupra roților pompelor centrifuge pot avea de asemenea un efect dinamic important.

Asupra roții acționează forțe datorită asimetriei curgerii produse de vultură sau difuzor și de mișcarea roții. În vulturile pompelor se produc *forțe suprasincrone* la frecvența de trecere a paletelor. La rândul lor, pompele cu difuzor pot genera forțe mari în domeniul subsincron, în funcție de jocul între roată și carcasă. *Forțe subsincrone*, având componente cu frecvențe între 30% și 80 din frecvența rotației, pot fi atribuite curgerilor parțiale sau asociate cu forțele destabilizatoare. Interacțiunea roată/carcasă poate fi descrisă utilizând coeficienți dinamici ai forțelor.

La *compresoarele centrifuge* apar frecvent *vibrații autoexcitate*, mai des în cele cu aranjament "spate-în-spate" și în unități industriale cu turații mari, pentru gaze cu densitate mare. De fapt, la un procent mare de compresoare cu turații mari se observă vibrații subarmonice cu amplitudini mici chiar în condiții normale de lucru. La unele dintre acestea apar probleme de stabilitate. Frecvența predominantă a vibrațiilor observate este egală cu frecvența proprie fundamentală de încovoiere a rotorului.

Vibrațiile autoexcitate datorite forțelor aerodinamice sunt de două feluri: a) vibrații la care forțele destabilizatoare sunt funcție de mișcarea de precesie a rotorului; acestea sunt produse de etanșările labirintice și de încărcarea nesimetrică a paletelor roții centrifuge; și b) vibrații la care curgerea principală este destabilizată de forțe hidrodinamice sau vâscoase, care sunt independente de vibrația mecanică, cum sunt cele produse de curgerea desprinsă rotitoare (*rotating stall*) și/sau de pompaj (*surge*).

Forțele aerodinamice care apar în urma interacțiunii roții cu fluidul antrenat introduc rigidități atât directe cât și de cuplaj transversal. Într-o mașină cu curgere radială a fluidului de lucru, variația forței datorită variațiilor jocului este neglijabilă în comparație cu cea produsă de variația impulsului fluidului într-o roată excentrică, deoarece prima dintre acestea este perpendiculară pe direcția curgerii principale.

La toate compresoarele pentru gaze de mare densitate s-au înregistrat și *vibrații forțate*. Acestea au următoarele comportări tipice: a) apar aproape de regimul de pompaj și au amplitudine relativ constantă; b) frecvența asincronă este foarte joasă (10% din cea corespunzătoare turației) și c) amplitudinea asincronă depinde de viteza la extremitatea paletelor și de densitatea gazului.

7.5 Precesia inversă datorită frecării uscate

Precesia inversă produsă de frecarea uscată este o vibrație autoexcitată de contactul cu frecare între rotor și stator. Rotorul este în contact permanent cu statorul, alunecând continuu pe suprafața de contact, având o mișcare de precesie inversă, la o frecvență nesincronă care depinde de amortizare și de raportul între rigiditățile rotorului și statorului.

7.5.1 Contactul cu frecare între rotor și stator

Când rotorul ajunge în contact cu statorul, sunt posibile diferite tipuri de mișcare, de la precesia directă sincronă, precesia sub- și supra-sincronă, până la precesia inversă și mișcarea haotică. Problema de contact este puternic neliniară chiar dacă rotorul și statorul sunt liniare.

Precesia inversă la contactul cu frecare a fost semnalată de Newkirk [7.18] pe când studia frecarea radială de contact a arborelui. În timpul unui experiment, frecarea a devenit puternică și, datorită forței mari de frecare, rotorul a început să se rotească violent pe suprafața interioară a unui inel statoric rigid. Rularea nu a avut loc până când arborele nu s-a frecat puternic de inelul statorului.

În pofida neliniarității puternice datorită contactului, dezechilibrul masic al rotorului poate produce o precesie sincronă pură. Totuși, în anumite condiții, mișcarea sincronă poate deveni instabilă iar mișcarea rotorului se poate transforma într-o precesie asincronă care poate fi foarte distructivă. Precesia inversă poate apare chiar în domeniile de turație în care precesia directă sincronă este stabilă.

În [7.19] se descrie apariția unor frecări de contact rotor/stator la un turbogenerator de 600 MW care a fost total distrus în timpul precesiei inverse. Companiile de asigurări relatează că cele mai frecvente deteriorări la turbinele cu abur apar ca urmare a contactului dintre rotor și stator, ajungând până la 22% din totalul despăgubirilor plătite în domeniu.

Cauza principală a precesiei datorită frecării uscate este ungerea improprie în mașinile cu jocuri mici. O descriere simplificată a mecanismului care produce acest efect apare în cartea lui Den Hartog [7.21]. Aceeași explicație este dată în [7.22]. În [7.19] se prezintă o soluție analitică care ține cont de dezechilibrul rotorului, frecarea și alunecarea între rotor și stator, precum și masa, rigiditatea și amortizarea rotorului.

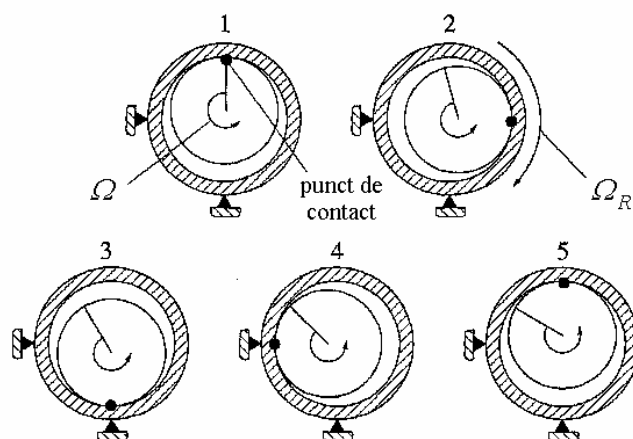


Fig. 7.24 [7.20]

Cercetări recente susținute de rezultate experimentale sunt descrise în [7.20]. În fig. 7.24 este ilustrată deplasarea rotorului fără alunecare pe suprafața interioară a carcasei, la câteva momente diferite în timp. Se poate observa că în timp ce rotația rotorului este de numai 60 de grade, mișcarea de precesie parcurge un ciclu complet.

7.5.2 Precesia instabilă datorită frecării uscate

“Precesia uscată” este rezultatul unei forțe de frecare neechilibrate de tip Coulomb care apare într-un punct de pe suprafața exterioară a unui arbore sau rotor, când acesta este deformat până atinge statorul (fig. 7.25). Deoarece forța de frecare, F_f , este aproximativ proporțională cu componenta radială, N , a forței de contact, se crează premisele unei instabilități.

Forța de frecare F_f poate fi descompusă într-un cuplu $F_f C$ și o forță paralelă și egală, aplicate în centrul arborelui (deformat). Cuplul acționează ca o frână asupra arborelui, care se presupune că este antrenat cu viteza unghiulară constantă Ω , necesitând o creștere neglijabilă a cuplului motor. Forța F_f prin centrul arborelui acționează într-o direcție tangentă la suprafața interioară a lagărului. Direcția forței F_f se schimbă cu poziția arborelui în lagăr sau ghidaj, astfel încât arborele va fi deplasat în interiorul lagărului așa cum este arătat cu

săgeata desenată cu linie întreruptă. Se observă că arborele este deplasat de-a lungul interstițiului în sens contrar propriei rotații (precesie inversă). Când punctul de contact se deplasează în lungul periferiei carcusei sau ghidajului, forța rămâne tangențială la cercul de precesie, întreținând mișcarea.

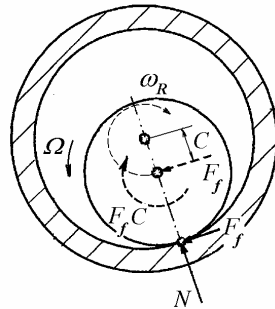


Fig. 7.25

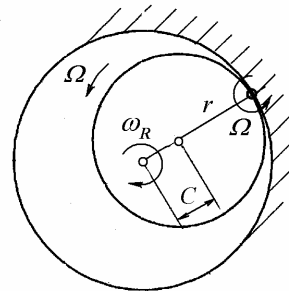


Fig. 7.26

Această precesie inversă poate apare dacă forța de frecare de contact este suficient de mare pentru a preveni alunecarea între rotor și stator. O condiție de nealunecare în punctul de contact impune ca precesia rotorului să aibă loc la viteza unghiulară ω_R exprimată în funcție de viteza unghiulară de rotație a arborelui Ω prin relația cinematică (fig. 7.26)

$$\omega_R = -\frac{r}{C}\Omega, \quad (7.97, a)$$

unde r este raza arborelui și C este jocul radial. Deoarece jocurile inelare, chiar cele din afara etanșărilor, sunt foarte mici în comparație cu raza rotorului, din formula de mai sus rezultă pulsații foarte mari ale precesiei inverse, care nu se pot atinge în realitate, când mai intervin mișcarea de alunecare și suprafețe de contact deformabile. Totuși, este posibil să apară frecvențe suprasincrone foarte mari și forțe mari care produc deteriorări importante. De notat că precesia inversă dă naștere la tensiuni alternante în arbore, care pot produce ruperi prin oboseală.

Dacă rotorul alunecă față de stator, se obține o expresie diferită a pulsației precesiei. Forța normală este egală cu diferența între forța centrifugă și forța de readucere elastică $N = mC\omega_R^2 - kC$. În direcție tangențială, forța de amortizare vâscoasă este $F_d = c_e C\omega_R$ iar forța de frecare este $F_f = \mu N$, unde μ este coeficientul de frecare.

Pentru a menține contactul continuu, forța radială rezultantă trebuie să fie orientată spre exterior. Din condiția $mC\omega_R^2 > kC$ rezultă

$$\omega_R > \sqrt{\frac{k}{m}},$$

deci valoarea absolută a pulsației mișcării de precesie trebuie să fie mai mare decât pulsația proprie neamortizată a rotorului.

Pentru a întreține precesia, forța tangențială trebuie să fie orientată în sensul forței de frecare de contact, $F_f + F_d \geq 0$,

$$\mu \left(m C \omega_R^2 - k C \right) + c_e C \omega_R \geq 0.$$

Această condiție conduce la următoarea ecuație de gradul doi în pulsația precesiei

$$\omega_R^2 + \frac{c_e}{\mu m} \omega_R - \frac{k}{m} \geq 0$$

cu soluția acceptabilă

$$\omega_R = \frac{k}{m} \left(-\frac{\zeta_e}{\mu} - \sqrt{1 + \frac{\zeta_e^2}{\mu^2}} \right), \quad (7.97, b)$$

în care $\zeta_e = \frac{c_e}{2\sqrt{km}}$.

Această explicație simplă se bazează pe un model de rotor simetric cu un disc, în care planul frecării rotor/stator coincide cu planul care conține masa concentrată. În general, frecarea într-un plan poate produce o precesie de amplitudine mare în alt plan, în care amplitudinea precesiei nu este limitată de jocul între rotor și stator.

Deși explicația lui Den Hartog pare să arate că toate cazurile de frecare rotor/stator ar putea iniția vibrații necontrolate ale rotorului, aceasta nu se întâmplă în mașinile reale, în principal datorită deformabilității statorului și amortizării inerente din sistem. Se consideră că, deoarece trebuie să existe o valoare minimă a coeficientului de frecare la suprafața de contact, sub care vibrația nu poate fi întreținută, este posibil ca, pentru un nivel dat al amortizării, vibrația să se atenueze indiferent de rigiditatea statorului.

Apariția precesiei inverse cu alunecare sau cu rostogolire pură este determinată de unghiul de frecare. Sub o valoare limită a unghiului de frecare precesia inversă nu este posibilă.

7.6 Instabilitatea datorită factorilor asimetrici

Scopul acestui subcapitol este prezentarea caracteristicilor teoretice particulare ale rotoarelor axial asimetrice în termeni cantitativi simpli. Ortotropia arborelui produce vibrații cu un vârf de rezonanță la aproximativ jumătate din turația critică și, pentru amortizări mici, un domeniu de comportare instabilă posibilă între

cele două turații critice. În plus, răspunsul la dezechilibru masic este funcție de poziția unghiulară a dezechilibrului. Rotoarele care au discuri cu momente de inerție diametrale diferite (de ex. elicile cu două pale ale avioanelor mici și turbinelor eoliene, și unele ventilatoare) sunt dinamic instabile peste o anumită turație, iar unele dintre acestea pot reveni la o condiție stabilă la o turație suficient de mare, în funcție de mărimea cuplurilor giroscopice și de diferența între momentele de inerție masice principale.

7.6.1 Excitația parametrică

O clasă aparte de instabilități ale sistemelor rotor-lagăre este descrisă de ecuații diferențiale cu coeficienți variabili. Deoarece coeficienții constau din parametri ai sistemului rotor-lagăre, acest tip de instabilitate se numește “excitație parametrică”. Spre deosebire de instabilitățile autoexcitate, în care precesia are loc totdeauna la o pulsație subsincronă egală cu o pulsație proprie a sistemului, excitațiile parametrică produc precesii care pot fi sincrone, subsincrone sau suprasincrone, în funcție de modul de variație a parametrilor în fiecare caz particular. Unele dintre aceste “instabilități” seamănă mai mult cu o turație critică sau cu o vibrație forțată decât cu o instabilitate propriu zisă, atât prin comportare cât și ca formă analitică. Într-adevăr, unele pot fi chiar “antrenate prin domeniul de instabilitate”, adică se poate găsi o turație superioară la care rotorul redevine stabil. Uneori, totuși, “domeniul turațiilor instabile” este destul de larg. În continuare se prezintă două cazuri simple: a) un arbore cu rigidități diferite în două planuri ortogonale, și b) rotorul cu un disc, cu momente de inerție masice diametrale diferite față de două axe ortogonale.

7.6.2 Anizotropia arborelui

Un arbore poate avea flexibilitate asimetrică datorită unor canale frezate, cum sunt canalele de pană și creștăturile de bobinaj, sau datorită imperfecțiunilor de fabricație. La arbori cu rigidități diferite în două direcții perpendiculare între ele (rigiditate ortotropă) există un domeniu de turații în care precesia arborelui este instabilă. La astfel de sisteme, cu reazeme circular izotrope, este mai convenabil de lucrat într-un sistem de coordonate care se rotește odată cu axele principale de inerție ale secțiunii transversale a arborelui, evitând astfel prezența în ecuațiile de mișcare a unor coeficienți variabili în timp.

7.6.2.1 Precesia liberă a unui arbore vertical neamortizat

Se consideră un rotor Laval-Jeffcott cu o masă la mijloc, lagăre rigide și secțiunea transversală cu momente de inerție axiale principale I_1 și I_2 (fig. 7.27, a). Analiza se face utilizând un sistem de coordonate η , ζ care se rotește cu viteza

unghiulară constantă a arborelui Ω , pozitivă în sens anti-orar. Se presupune că deplasările η și ζ sunt paralele cu axele principale de inerție (fig. 7.27, b).

Fie k_η rigiditatea în direcția η și k_ζ în direcția ζ . La arborele din fig. 7.27, $k_\eta < k_\zeta$. Axa η față de care rigiditatea este minimă se numește “axa slabă”.

Notând

$$k = \frac{1}{2}(k_\eta + k_\zeta), \quad \Delta k = \frac{1}{2}(k_\zeta - k_\eta), \quad (7.98)$$

rigiditățile principale se pot scrie sub forma

$$k_\zeta = k + \Delta k, \quad k_\eta = k - \Delta k, \quad (7.99)$$

și se definește *gradul de asimetrie*

$$\mu = \frac{\Delta k}{k} = \frac{k_\zeta - k_\eta}{k_\zeta + k_\eta}. \quad (7.100)$$

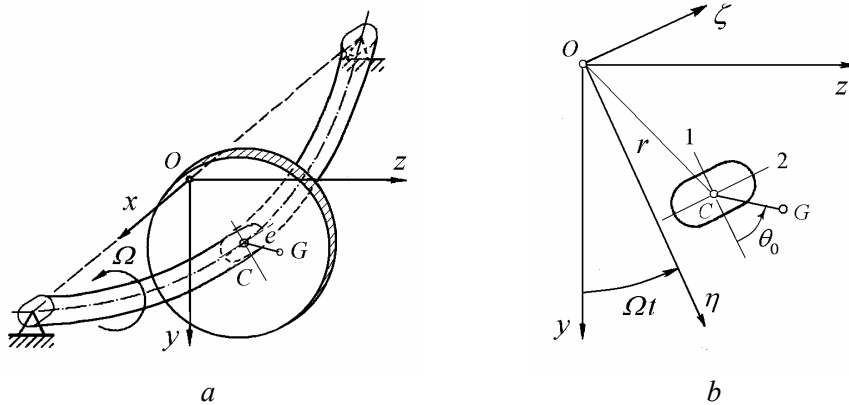


Fig. 7.27

Dacă arborele ar fi axial izotrop, ecuațiile de mișcare în coordonate fixe ar fi (2.3)

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + k y &= m e \Omega^2 \cos(\Omega t + \theta_0), \\ m \ddot{z} + k z &= m e \Omega^2 \sin(\Omega t + \theta_0). \end{aligned} \quad (7.101)$$

Utilizând transformarea de coordonate (2.35)

$$\begin{aligned} y &= \eta \cos \Omega t - \zeta \sin \Omega t, \\ z &= \eta \sin \Omega t + \zeta \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (7.102)$$

ecuațiile (7.101) pot fi scrise în coordonate rotative sub forma (2.47)

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta} - 2m\Omega\dot{\zeta} + (k - m\Omega^2)\eta &= me\Omega^2\cos\theta_0, \\ m\ddot{\zeta} + 2m\Omega\dot{\eta} + (k - m\Omega^2)\zeta &= me\Omega^2\sin\theta_0. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Pentru arborele ortotrop, ecuațiile (7.103) devin

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta} - 2m\Omega\dot{\zeta} + (k_\eta - m\Omega^2)\eta &= me\Omega^2\cos\theta_0, \\ m\ddot{\zeta} + 2m\Omega\dot{\eta} + (k_\zeta - m\Omega^2)\zeta &= me\Omega^2\sin\theta_0. \end{aligned} \quad (7.104)$$

7.6.2.1 Precesia liberă. Vitezele unghiulare de precesie

La un rotor vertical cu o masă centrală perfect echilibrată, se consideră partea omogenă a ecuațiilor (7.104)

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} - 2\Omega\dot{\zeta} + (\omega_\eta^2 - \Omega^2)\eta &= 0, \\ \ddot{\zeta} + 2\Omega\dot{\eta} + (\omega_\zeta^2 - \Omega^2)\zeta &= 0, \end{aligned} \quad (7.105)$$

în care

$$\omega_\eta^2 = \frac{k_\eta}{m}, \quad \omega_\zeta^2 = \frac{k_\zeta}{m}, \quad (7.106)$$

sunt pătratele pulsațiilor proprii de încovoiere.

Cu soluții exponențiale de forma

$$\eta = \eta_0 e^{\lambda t}, \quad \zeta = \zeta_0 e^{\lambda t}, \quad (7.107)$$

ecuațiile (7.105) se transformă în

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + \omega_\eta^2 - \Omega^2)\eta_0 - 2\Omega\lambda\zeta_0 &= 0, \\ 2\Omega\lambda\eta_0 + (\lambda^2 + \omega_\zeta^2 - \Omega^2)\zeta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Pentru a avea soluții nebanale, determinantul coeficienților trebuie să se anuleze. Din această condiție se obține ecuația caracteristică

$$(\lambda^2 + \omega_\eta^2 - \Omega^2)(\lambda^2 + \omega_\zeta^2 - \Omega^2) + (2\Omega\lambda)^2 = 0,$$

sau

$$\lambda^4 - (\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 + 2\Omega^2)\lambda^2 + (\omega_\eta^2 - \Omega^2)(\omega_\zeta^2 - \Omega^2) = 0. \quad (7.109)$$

Rădăcinile sunt

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^2 &= -\frac{1}{2}(\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 + 2\Omega^2) \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 + 2\Omega^2)^2 - (\omega_\eta^2 - \Omega^2)(\omega_\zeta^2 - \Omega^2)}. \end{aligned} \quad (7.110)$$

La arborele din fig. 7.27, $\omega_\eta < \omega_\zeta$. În fig. 7.28, *a* se prezintă variația lui λ^2 în funcție de Ω^2 .

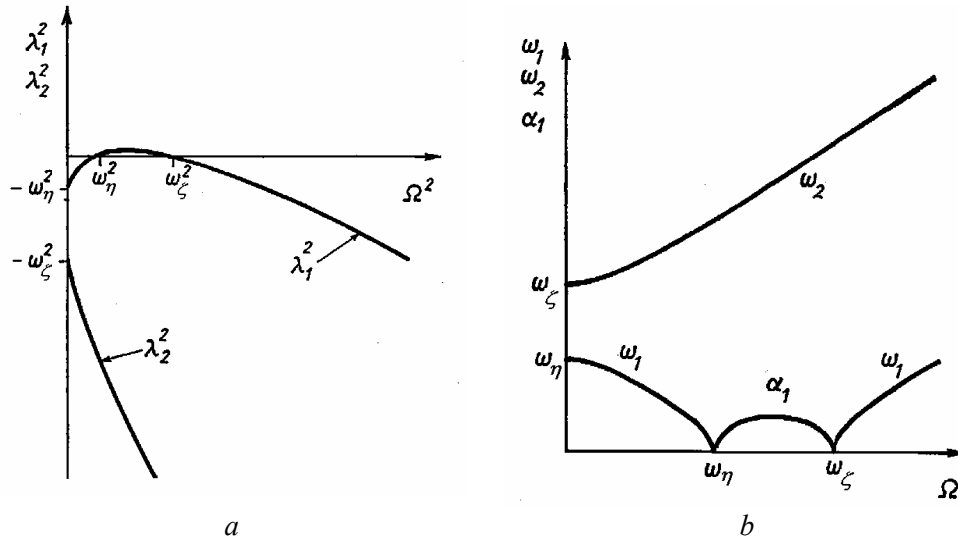


Fig. 7.28 [7.23]

Dacă $\Omega < \omega_\eta$ și $\omega_\zeta < \Omega$, ambele rădăcini λ^2 sunt negative, deci λ este pur imaginară,

$$\lambda_1, \lambda_1^* = \pm i \omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{|\lambda_1^2|}, \quad \lambda_2, \lambda_2^* = \pm i \omega_2, \quad \omega_2 = \sqrt{|\lambda_2^2|}, \quad (7.111)$$

și rotorul este totdeauna stabil.

Când $\omega_\eta < \Omega < \omega_\zeta$, rădăcina λ_1^2 este pozitivă

$$\lambda_1, \lambda_1^* = \pm \alpha_1, \quad \alpha_1 = \sqrt{\lambda_1^2}, \quad (7.112)$$

astfel încât una din valorile lui λ este reală pozitivă și rotorul devine instabil.

În fig. 7.28, *b* este ilustrată variația lui ω_1 , ω_2 și α_1 în funcție de Ω .

La limita de stabilitate, partea reală a lui λ este zero și, deoarece λ^2 este real, partea imaginară a lui λ trebuie să fie de asemenea zero. Astfel, pulsațiile limită se pot obține înlocuind $\lambda = 0$ în ecuația (7.109). Rezultă

$$\Omega_{c1} = \omega_\eta, \quad \Omega_{c2} = \omega_\zeta, \quad (7.113)$$

și rotorul este instabil între aceste două pulsații. Mișcările instabile din acest domeniu ar fi putut fi prezise direct din ecuația (7.109) utilizând criteriul Routh-Hurwitz, coeficientul a_4 fiind negativ.

7.6.2.2 Diagramele vitezelor unghiulare de precesie

În figura 7.29, *a* s-a reprezentat grafic variația pulsațiilor proprii ω_R calculate față de sistemul de coordonate rotativ, în funcție de Ω . În fig. 7.29, *b* se arată un grafic similar pentru pulsațiile proprii ω_S calculate față de sistemul de coordonate fixe y, z . În ambele figuri s-a considerat un grad de asimetrie $\mu = 0,28$.

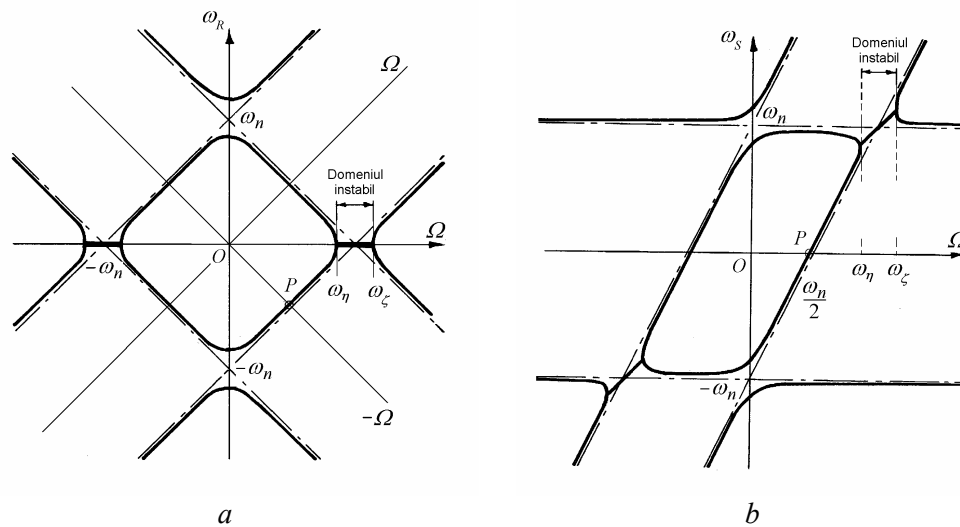


Fig. 7.29 [7.3]

Un fenomen interesant corespunde punctului P din fig. 7.29, *b*, care definește o mișcare fără precesie ($\omega_S = 0$) la viteza unghiulară de rotație $\Omega = \omega_n/2$. O astfel de mișcare ar putea fi produsă de o excitație fixă în spațiu, cum ar fi greutatea proprie a unui rotor orizontal. În fig. 7.29, *a* acest punct se află pe dreapta $\omega_R = -\Omega$. Într-adevăr, o forță cu direcție fixă față de sistemul de coordonate fixe apare ca rotindu-se în sens contrar, cu viteza unghiulară $-\Omega$ față de sistemul de coordonate rotativ. Detalii se prezintă în Secțiunea 7.6.2.5.

Asimptotele corespund liniilor din diagramele vitezelor unghiulare de precesie din fig. 7.7, trasate pentru un rotor cu arbore axial izotrop. Deși s-au utilizat patru cadrane, este suficient doar semiplanul drept (unde $\Omega > 0$).

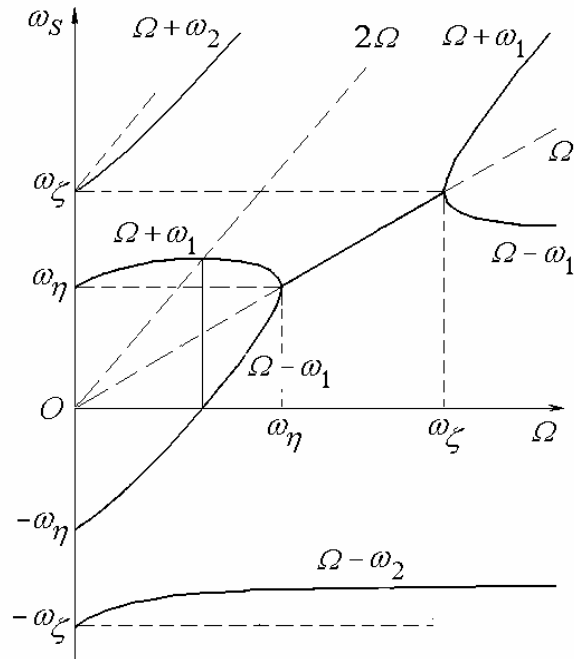


Fig. 7.30

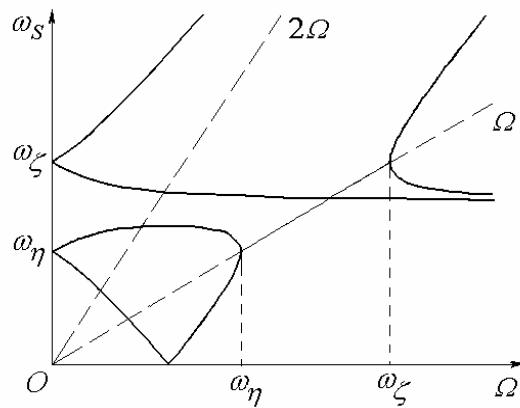


Fig. 7.31

O diagramă a vitezelor unghiulare de precesie reprezentată doar în semiplanul drept (pentru Ω pozitive) este arătată în fig. 7.30. Pentru a mări zona instabilă, diagrama a fost calculată pentru un grad mare de asimetrie $\mu = 0,5283$

[7.23]. Linia întreruptă $\omega_s = \Omega$ (încălinată la 45°) marchează cele două viteze unghiulare critice de precesie sincronă.

Adesea, diagrama vitezelor unghiulare de precesie este reprezentată numai în primul cadran, ca în fig. 7.31. Suprapunerea pulsațiilor pozitive peste cele negative îngreunează interpretarea diagramei.

7.6.2.3 Diagrama de stabilitate

Notând

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2}{2}, \quad (7.114)$$

precesia este instabilă în domeniul $\omega_\eta < \Omega < \omega_\zeta$ la vitezele unghiulare de rotație

$$\omega_0 \sqrt{1-\mu} < \Omega < \omega_0 \sqrt{1+\mu}. \quad (7.115)$$

Figura 7.32 este o diagramă de stabilitate care arată regiunile cu precesie stabilă și precesie instabilă, în funcție de gradul de asimetrie μ și de viteza unghiulară de rotație Ω . Curbele limită sunt parabole. Domeniul instabil crește cu gradul de asimetrie.

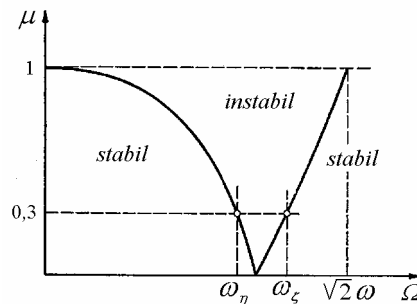


Fig. 7.32 [7.14]

7.6.2.4 Răspunsul la dezechilibru masic

În coordonate rotative, răspunsul la dezechilibru al rotoarelor neamortizate este descris de ecuațiile (7.104). Soluțiile în regim staționar au forma

$$\eta = e \frac{\Omega^2}{\omega_\eta^2 - \Omega^2} \cos \theta_0, \quad \zeta = e \frac{\Omega^2}{\omega_\zeta^2 - \Omega^2} \sin \theta_0. \quad (7.116)$$

Dezechilibrul produce o deplasare constantă în timp, cu amplitudinea $\rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$.

În sistemul de coordonate fixe, centrul discului are o precesie sincronă pe un cerc de rază $r = \rho$. Aceasta depinde de viteza unghiulară Ω și de unghiul de poziție al centrului de greutate θ_0 . O prezentare mai detaliată se face în Secțiunea 7.6.2.6 pentru rotoare cu amortizare externă.

7.6.2.5 Încărcarea prin greutatea proprie

După cum se poate observa din diagramele pulsațiilor proprii (Secțiunea 7.6.2.2), precesia unui arbore axial asimetric perfect echilibrat are o particularitate în plus când axa este orizontală. Forța gravitațională produce o *rezonanță secundară*.

În coordonate fixe

$$f_y = mg, \quad f_z = 0. \quad (7.117)$$

Transformarea forțelor din coordonate fixe în coordonate rotative se scrie

$$\begin{aligned} f_\eta &= f_y \cos \Omega t + f_z \sin \Omega t, \\ f_\zeta &= -f_y \sin \Omega t + f_z \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (7.118)$$

Înlocuind (7.117) în (7.118), încărcarea gravitațională poate fi exprimată în coordonate rotative sub forma

$$f_\eta = mg \cos \Omega t, \quad f_\zeta = -mg \sin \Omega t. \quad (7.119)$$

Înlocuind în ecuațiile (7.104) forțele de dezechilibru prin greutatea proprie mg rezultă

$$\begin{aligned} m \ddot{\eta} - 2m\Omega \dot{\zeta} + (k_\eta - m\Omega^2)\eta &= mg \cos \Omega t, \\ m \ddot{\zeta} + 2m\Omega \dot{\eta} + (k_\zeta - m\Omega^2)\zeta &= -mg \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (7.120)$$

Cu soluții de forma

$$\eta = \eta_G \cos \Omega t, \quad \zeta = \zeta_G \sin \Omega t, \quad (7.121)$$

se obține

$$\begin{aligned} (\omega_\eta^2 - 2\Omega^2)\eta_G - 2\Omega^2 \zeta_G &= -g, \\ -2\Omega^2 \eta_G + (\omega_\zeta^2 - 2\Omega^2)\zeta_G &= -g, \end{aligned} \quad (7.122)$$

și

$$\eta_G = -g \frac{4\Omega^2 - \omega_\zeta^2}{\omega_\eta^2 \omega_\zeta^2 - 2\Omega^2 (\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2)}, \quad (7.123, a)$$

$$\zeta_G = g \frac{4\Omega^2 - \omega_\eta^2}{\omega_\eta^2 \omega_\zeta^2 - 2\Omega^2(\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2)}. \quad (7.123, b)$$

La pulsația de anulare a numitorului expresiilor (7.123)

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_\eta^2 \omega_\zeta^2}{\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} \right) = \Omega_s^2, \quad (7.124)$$

apare o rezonanță, deci la aproximativ jumătate din media celor două viteze unghiulare critice.

Într-adevăr, când diferența celor două rigidități este foarte mică, adică $\omega_\eta = \omega_0$ și $\omega_\zeta = (1 + \varepsilon)\omega_0$,

$$\Omega_s^2 = \frac{\omega_\eta^2 \omega_\zeta^2}{2(\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2)} = \frac{\omega_0^2 (1 + \varepsilon)^2}{2[1 + (1 + \varepsilon)^2]} \cong \frac{\omega_0^2 (1 + 2\varepsilon)}{4(1 + \varepsilon)} \cong \frac{\omega_0^2}{4} (1 + \varepsilon),$$

sau

$$\Omega_s \cong \frac{\omega_0}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta + \omega_\zeta}{2}. \quad (7.125)$$

Astfel, la rotoare cu arbori axial asimetrici apare o rezonanță subarmonică produsă doar de greutatea proprie, cunoscută ca *viteza unghiulară critică secundară*.

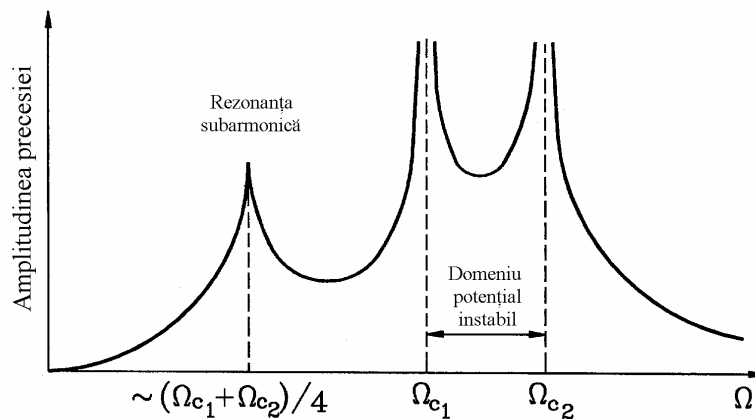


Fig. 7.33 [7.4]

În vecinătatea turației critice secundare, numărătorul și numitorul expresiei razei precesiei produse de greutatea proprie au același ordin de mărime. Raza precesiei staționare depinde de raportul $(\omega_\zeta^2 - \omega_\eta^2)/(\Omega_s^2 - \Omega^2)$. Rezultă că la această turație creșterea în timp a amplitudinii rezonante este lentă.

În fig. 7.33 se prezintă schematic variația, în funcție de viteza unghiulară de rotație, a amplitudinii precesiei produse de acțiunea simultană a dezechilibrului masic și greutateii proprii.

7.6.2.6 Arbore axial asimetric, cu amortizare externă

Prezentarea care urmează este reprodusă din articolul clasic al lui H. D. Taylor [7.24].

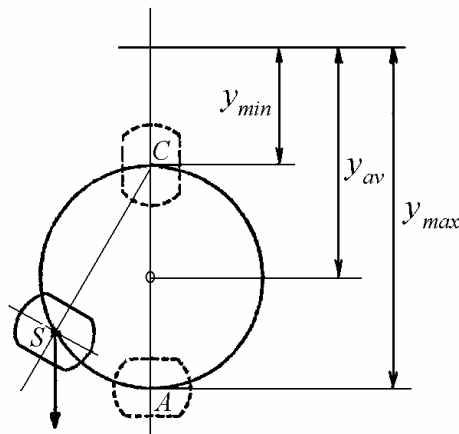


Fig. 7.34

Figura 7.34 ilustrează variația deformației statice a unui arbore orizontal rotit încet; valoarea maximă apare când axa slabă este verticală (poziția A) iar cea minimă când axa slabă este orizontală (poziția C). Pentru poziții intermediare (ca în S) centrul arborelui se deplasează pe o orbită circulară care trece prin punctele extreme, pe care o parcurge de două ori în timpul unei rotații complete a arborelui.

În fig. 7.35 se arată poziția arborelui pe orbită la fiecare sfert de perioadă de rotație.

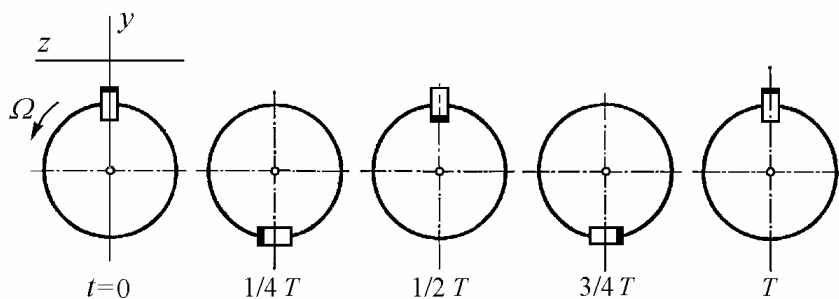


Fig. 7.35

La un arbore în rotație, un dezechilibru masic care se rotește cu dublul vitezei unghiulare a arborelui va produce o vibrație a arborelui cu frecvență dublă, cu un vârf rezonant la o turație a arborelui egală cu jumătate din media turațiilor critice fundamentale.

Răspunsul la dezechilibru al unui rotor simplu, cu amortizare vâscoasă externă, este descris în coordonate rotative de ecuații de forma

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_e \omega_0 & -2\Omega \\ 2\Omega & 2\zeta_e \omega_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\mu)\omega_0^2 - \Omega^2 & -2\zeta_e \omega_0 \Omega \\ 2\zeta_e \omega_0 \Omega & (1+\mu)\omega_0^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = e\Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{Bmatrix} \quad (7.126)$$

în care raportul de amortizare

$$\zeta_e = \frac{c_e}{2m\omega_0}. \quad (7.127)$$

Curbele răspunsului la dezechilibru masic au aspect diferit în funcție de valoarea relativă a gradului de asimetrie față de raportul de amortizare. Când $\mu > \zeta_e$, raza precesiei arborelui poate deveni infinită, chiar în prezența amortizării. La arbori cu asimetrie axială moderată ($\mu < \zeta_e$), aparent nu există o rază de precesie infinită dar apar o serie de alte particularități.

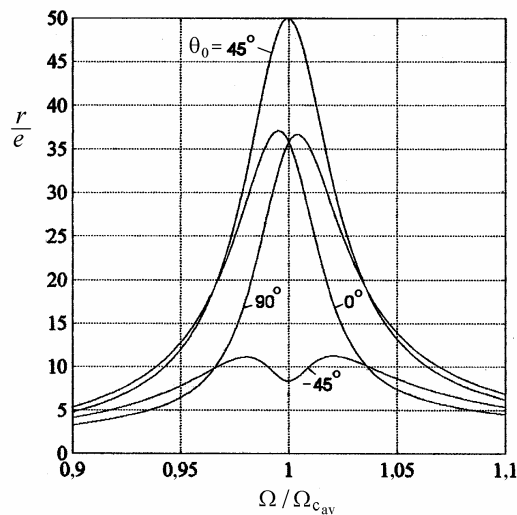


Fig. 7.36

În fig. 7.36 se prezintă curbele de răspuns la dezechilibru masic, pentru patru valori ale unghiului θ_0 între raza vectorială a centrului de greutate al discului, în sistemul de referință mobil, și axa “slabă” a arborelui, pentru $\mu = 0,05$ și $\zeta_e = 0,07$.

Se observă că o poziție favorabilă a dezechilibrului masic poate reduce de cinci ori răspunsul maxim al rotorului, pentru valori neschimbate ale dezechilibrului, raportului de amortizare și gradului de asimetrie. Vârful cel mai pronunțat apare când dezechilibrul este defazat 45° înaintea axei slabe, în sensul rotației. Vârful cel mai mic apare când dezechilibrul este defazat 45° în urma axei slabe ($\theta_0 = -45^\circ$).

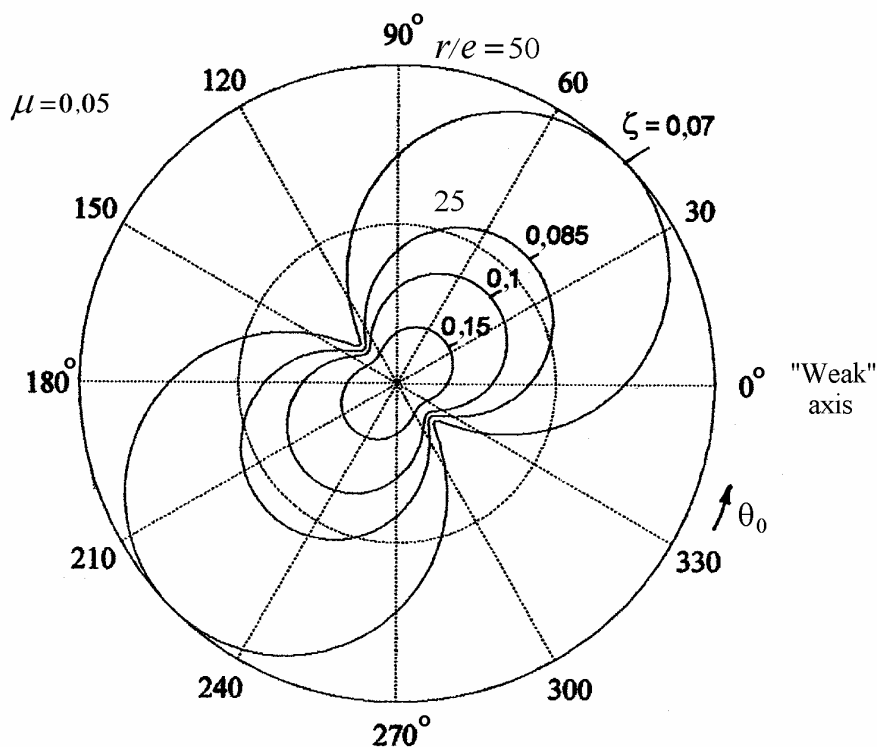


Fig. 7.37

În fig. 7.37 se prezintă diagrama polară a variației razei maxime de precesie a discului rotorului în funcție de poziția unghiulară a dezechilibrului față de axa slabă a arborelui, pentru patru valori ale raportului de amortizare. Această rază maximă poate varia considerabil cu sensul rotației deoarece, dacă se inversează sensul rotației, punctul cel mai sensibil pentru dezechilibru (45° înaintea axei slabe) devine punctul cel mai puțin sensibil (45° în urma axei slabe).

Condiția de stabilitate este

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 - \mu^2 + 4\zeta_e^2 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \geq 0. \quad (7.128)$$

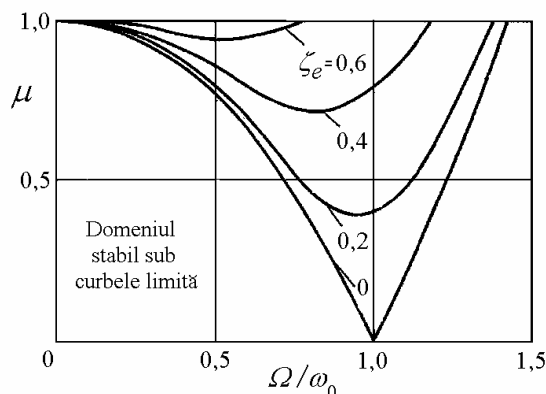


Fig. 7.38 [7.14]

În fig. 7.38 se prezintă o diagramă de stabilitate, în care curbele limită au expresiile

$$\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 - 2\zeta_e^2 \mp \sqrt{(1 - 2\zeta_e^2)^2 - \left(\frac{\omega_\eta \omega_\zeta}{\omega_0^2}\right)^2}. \quad (7.129)$$

Cu amortizare suficientă și cu o asimetrie minimă a arborelui se poate evita funcționarea instabilă.

7.6.3 Distribuția axial asimetrică a masei

Se consideră un arbore elastic axial simetric, cu masa neglijabilă, care se rotește cu viteză unghiulară constantă. Arborele este rezemat în lagăre identice circular izotrope și are la mijloc un disc rigid. Deoarece discul este astfel rezemat încât deplasările unghiulare sunt decuplate de cele de translație și se rotește față de una din axele principale de inerție, se vor examina oscilațiile de mică amplitudine față de celelalte două axe principale de inerție.

7.6.3.1 Ecuațiile lui Euler

Fie un disc rigid montat articulat în centrul de greutate O, plasat în originea triedrului de referință fix X, Y, Z (fig. 7.39).

Este convenabilă utilizarea unui sistem de coordonate ξ, η, ζ care se rotește cu discul, față de care momentele de inerție masice și cele centrifugale sunt constante. Dacă acest sistem coincide cu axele principale de inerție ale discului, momentele centrifugale sunt nule iar cele de inerție sunt momentele de inerție principale J_1, J_2, J_3 .

Dacă versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ai axelor ξ, η, ζ coincid și se rotesc cu axele principale de inerție 1, 2, 3, atunci momentul cinetic față de centrul de greutate este

$$\bar{K} = J_1 \omega_1 \bar{i} + J_2 \omega_2 \bar{j} + J_3 \omega_3 \bar{k}, \quad (7.130)$$

unde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sunt componentele vitezei unghiulare *absolute* a discului în lungul axelor principale de inerție.

Viteza unghiulară, $\bar{\omega}$, exprimată prin cei trei versori $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, față de un sistem de coordonate fixe, este

$$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{i} + \omega_2 \bar{j} + \omega_3 \bar{k}. \quad (7.131)$$

Conform teoremei momentului cinetic, cuplul exterior este egal cu derivata lui \bar{K} în raport cu timpul

$$\bar{M} = \frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}, \quad (7.132)$$

$$\bar{M} = J_1 \dot{\omega}_1 \bar{i} + J_2 \dot{\omega}_2 \bar{j} + J_3 \dot{\omega}_3 \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ J_1 \omega_1 & J_2 \omega_2 & J_3 \omega_3 \end{vmatrix}. \quad (7.133)$$

Cuplul care acționează asupra discului are componentele M_1, M_2, M_3 în lungul axelor principale de inerție

$$\bar{M} = M_1 \bar{i} + M_2 \bar{j} + M_3 \bar{k}. \quad (7.134)$$

Egalând componentele corespunzătoare din expresiile (7.133) și (7.134) se obțin ecuațiile scalare

$$M_1 = J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3, \quad (7.135, a)$$

$$M_2 = J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1, \quad (7.135, b)$$

$$M_3 = J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2, \quad (7.135, c)$$

cunoscute ca *ecuațiile dinamice ale lui Euler*.

7.6.3.2 Ecuațiile momentului cinetic

Dacă axa ξ este în lungul axei de rotație iar axele η și ζ sunt în lungul unor diametre perpendiculare între ele, se pot introduce următoarele notații

$$J_P = J_1, \quad J_\eta = J_2, \quad J_\zeta = J_3, \quad (7.136)$$

$$\Omega = \omega_1 = \text{const.}, \quad \omega_\eta = \omega_2, \quad \omega_\zeta = \omega_3, \quad (7.137)$$

$$M_1 = 0, \quad M_\eta = M_2, \quad M_\zeta = M_3. \quad (7.138)$$

Ecuatiile (7.135, b) și (7.135, c) devin

$$\begin{aligned} J_\eta \dot{\omega}_\eta - (J_\zeta - J_P) \Omega \omega_\zeta &= M_\eta, \\ J_\zeta \dot{\omega}_\zeta - (J_P - J_\eta) \Omega \omega_\eta &= M_\zeta. \end{aligned} \quad (7.139)$$

Poziția unghiulară a discului față de sistemul de coordonate fixe se notează

$$\bar{\sigma} = \beta \bar{j} + \gamma \bar{k} \quad (7.140)$$

unde β și γ sunt componentele unghiului dintre axa arborelui și linia lagărelor în triedrul de referință rotativ

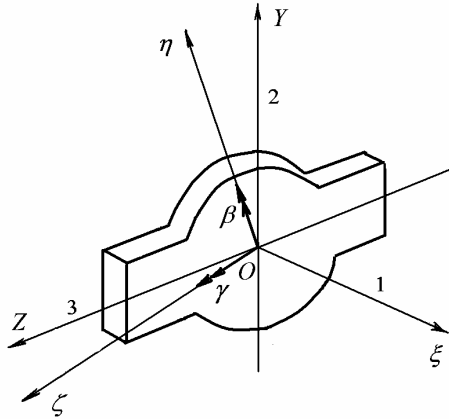


Fig. 7.39

Derivata lui $\bar{\sigma}$ în raport cu timpul este

$$\dot{\bar{\sigma}} = \dot{\beta} \bar{j} + \beta \dot{\bar{j}} + \dot{\gamma} \bar{k} + \gamma \dot{\bar{k}}, \quad (7.141)$$

unde

$$\dot{\bar{j}} = \bar{\Omega} \times \bar{j} = \Omega \bar{i} \times \bar{j} = \Omega \bar{k}, \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\Omega} \times \bar{k} = \Omega \bar{i} \times \bar{k} = -\Omega \bar{j},$$

astfel încât

$$\dot{\bar{\sigma}} = (\beta - \Omega \gamma) \bar{j} + (\gamma + \Omega \beta) \bar{k}. \quad (7.142)$$

Însă

$$\dot{\bar{\sigma}} = \omega_\eta \bar{j} + \omega_\zeta \bar{k}. \quad (7.143)$$

Componentele vitezei unghiulare absolute în lungul axelor diametrale sunt

$$\begin{aligned}\omega_\eta &= \dot{\beta} - \Omega\gamma, \\ \omega_\zeta &= \dot{\gamma} + \Omega\beta.\end{aligned}\quad (7.144)$$

Înlocuind (7.144) în (7.139) rezultă

$$\begin{aligned}J_\eta(\ddot{\beta} - \Omega\dot{\gamma}) - (J_\zeta - J_P)(\dot{\gamma} + \Omega\beta)\Omega &= M_\eta, \\ J_\zeta(\dot{\gamma} + \Omega\dot{\beta}) - (J_P - J_\eta)\Omega(\dot{\beta} - \Omega\gamma) &= M_\zeta,\end{aligned}\quad (7.145)$$

sau

$$\begin{aligned}J_\eta\ddot{\beta} + \Omega(J_P - J_\eta - J_\zeta)\dot{\gamma} + \Omega^2(J_P - J_\zeta)\beta &= M_\eta, \\ J_\zeta\dot{\gamma} - \Omega(J_P - J_\eta - J_\zeta)\dot{\beta} + \Omega^2(J_P - J_\eta)\gamma &= M_\zeta.\end{aligned}\quad (7.146)$$

Componentele cuplului aplicat ca urmare a deplasărilor unghiulare β și γ au expresiile

$$M_\eta = -K\beta, \quad M_\zeta = -K\gamma, \quad (7.147)$$

unde K este o rigiditate torsională. Ecuațiile (7.146) devin

$$\begin{aligned}J_\eta\ddot{\beta} + \Omega(J_P - J_\eta - J_\zeta)\dot{\gamma} + [K + \Omega^2(J_P - J_\zeta)]\beta &= 0, \\ J_\zeta\dot{\gamma} - \Omega(J_P - J_\eta - J_\zeta)\dot{\beta} + [K + \Omega^2(J_P - J_\eta)]\gamma &= 0.\end{aligned}\quad (7.148)$$

7.6.3.3 Vitezele unghiulare de precesie în coordonate rotative

Ecuațiile de mișcare (7.148) pot fi acum rescrise în funcție de parametri adimensionali

$$\begin{aligned}(1 + \varepsilon)\ddot{\beta} + (\alpha - 2)\Omega\dot{\gamma} + [\omega_0^2 - \Omega^2(1 - \alpha - \varepsilon)]\beta &= 0, \\ (1 - \varepsilon)\dot{\gamma} - (\alpha - 2)\Omega\dot{\beta} + [\omega_0^2 - \Omega^2(1 - \alpha - \varepsilon)]\gamma &= 0,\end{aligned}\quad (7.149)$$

unde

$$\alpha = \frac{J_P}{\frac{1}{2}(J_\eta + J_\zeta)} \quad \text{este un factor de cuplaj giroscopic}, \quad (7.150)$$

$$\varepsilon = \frac{J_\eta - J_\zeta}{J_\eta + J_\zeta} \quad \text{este un factor de asimetrie masică}, \quad (7.151)$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{\frac{1}{2}(J_\eta + J_\zeta)} \text{ este o pulsație proprie (fictivă) de referință. (7.152)}$$

Cu soluții exponențiale de forma

$$\beta = \beta_0 e^{\lambda t}, \quad \gamma = \gamma_0 e^{\lambda t}, \quad (7.153)$$

ecuațiile (7.149) se transformă în

$$\begin{aligned} \left[(1+\varepsilon)\lambda^2 + \omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha-\varepsilon) \right] \beta_0 + (\alpha-2)\Omega\lambda\gamma_0 &= 0, \\ -(\alpha-2)\Omega\lambda\beta_0 + \left[(1+\varepsilon)\lambda^2 + \omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha-\varepsilon) \right] \gamma_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7.154)$$

Pentru a avea soluții nebanale, determinantul coeficienților deplasărilor unghiulare trebuie să se anuleze. Din această condiție rezultă ecuația caracteristică

$$a_1\lambda^4 + 2a_2\lambda^2 + a_3 = 0, \quad (7.155)$$

în care

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \varepsilon^2, \\ a_2 &= \omega_0^2 + \Omega^2 \left[1 - \varepsilon^2 + \frac{\alpha}{2}(\alpha-2) \right], \\ a_3 &= \left[\omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha-\varepsilon) \right] \left[\omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha+\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (7.156)$$

Valorile proprii au expresiile

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}{a_1}}. \quad (7.157)$$

Condițiile de stabilitate sunt

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0. \quad (7.158)$$

Primele două condiții sunt satisfăcute pentru

$$0 < \varepsilon < 1/\sqrt{2} \quad \text{și} \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (7.159)$$

iar ultima condiție impune

$$\left[\omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha-\varepsilon) \right] \left[\omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha+\varepsilon) \right] > 0. \quad (7.160)$$

Vitezele unghiulare critice se notează

$$\Omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\alpha+\varepsilon}}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\alpha-\varepsilon}}. \quad (7.161)$$

Cazul I. Când J_p este momentul de inerție masic cel mai mare, $1+\varepsilon < \alpha$, condiția (7.160) este satisfăcută și sistemul este stabil la toate vitezele unghiulare Ω . În fig. 7.40 se prezintă variația pulsațiilor proprii de precesie față de un sistem de coordonate mobil, fixat de rotor, în funcție de viteza unghiulară de rotație. În acest caz $a_2^2 - a_1 a_3 > 0$, deci λ^2 este reală și negativă. Sistemul este oscilator.

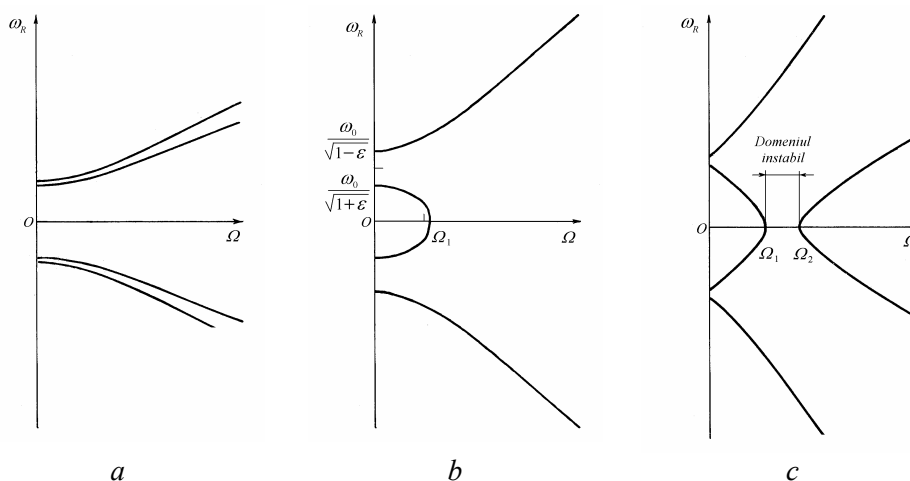


Fig. 7.40

Cazul II. Când J_p este momentul de inerție intermediar, $1-\varepsilon < \alpha < 1+\varepsilon$, sistemul este stabil la viteze unghiulare $\Omega < \Omega_1$ și instabil pentru $\Omega > \Omega_1$. Dacă există o viteză unghiulară critică, atunci mișcarea va fi stabilă sub această viteză și instabilă deasupra ei (fig. 7.40, b).

Cazul III. Când J_p este momentul de inerție cel mai mic, $\alpha < 1-\varepsilon$, sistemul este instabil la viteze unghiulare $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ și stabil pentru $\Omega < \Omega_1$ și $\Omega_2 < \Omega$. Dacă există două viteze unghiulare critice, mișcarea va fi stabilă sub cea mai mică și peste cea mai mare, dar va fi instabilă între cele două viteze unghiulare critice (fig. 7.40, c). Pentru o anumită valoare α , introducerea unei asimetrii masice ε tinde să micșoreze Ω_1 și să crească Ω_2 , lărgind domeniul turațiilor instabile.

Această observație se aplică și rotoarelor în consolă, cu arbori rigizi, cu discuri sau elici montate la un capăt și articulate la celălalt capăt, pentru care momentele de inerție transversale față de pivot (incluzând masa înmulțită cu o lungime la pătrat) sunt mai mari decât momentul de inerție masic axial.

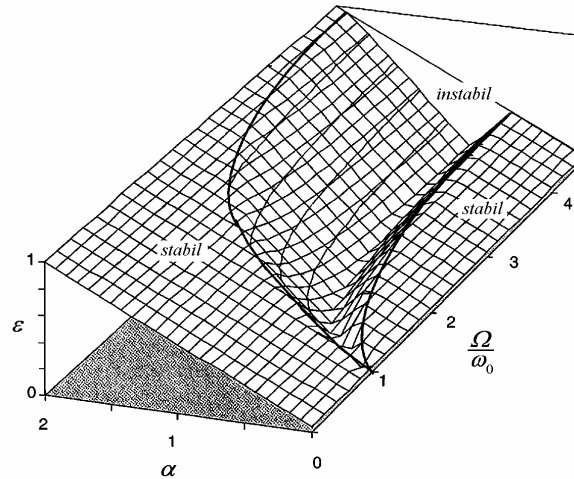


Fig. 7.41 [7.25]

În fig. 7.41 se arată o diagramă 3D a limitei de stabilitate pentru rotoare neamortizate, cu arbori axial asimetrici, în funcție de parametrii α și ε , și de viteza unghiulară adimensională Ω/ω_0 [7.25], pentru Cazul III.

7.6.3.4 Influența amortizării externe

Dacă se include amortizarea vâscoasă externă, ecuațiile (7.49) devin

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)\ddot{\beta} + 2\zeta_e\omega_0\dot{\beta} + (\alpha-2)\Omega\dot{\gamma} + [\omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha-\varepsilon)]\beta - 2\zeta_e\omega_0\Omega\gamma &= 0, \\ (1-\varepsilon)\ddot{\gamma} - (\alpha-2)\Omega\dot{\beta} + 2\zeta_e\omega_0\dot{\gamma} + 2\zeta_e\omega_0\Omega\beta + [\omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha-\varepsilon)]\gamma &= 0, \end{aligned} \quad (7.162)$$

unde

$$\zeta_e = \frac{c_e}{2\omega_0 m}. \quad (7.163)$$

Condiția de stabilitate (7.160) devine

$$[\omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha-\varepsilon)][\omega_0^2 - \Omega^2(1-\alpha+\varepsilon)] + (2\zeta_e\Omega)^2 > 0 \quad (7.164)$$

iar vitezele unghiulare critice (7.161), la marginile domeniului instabil, devin

$$\Omega_{1,2} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{(1-\alpha-2\zeta_e^2) \pm \sqrt{4\zeta_e^2(\zeta_e^2 + \alpha - 1) + \varepsilon^2}}}. \quad (7.165)$$

Așa cum se arată în diagrama de stabilitate din fig. 7.42, în prezența amortizării externe domeniul instabil ($\Omega_2 - \Omega_1$) este mai îngust și deplasat spre viteze unghiulare de rotație mai mari.

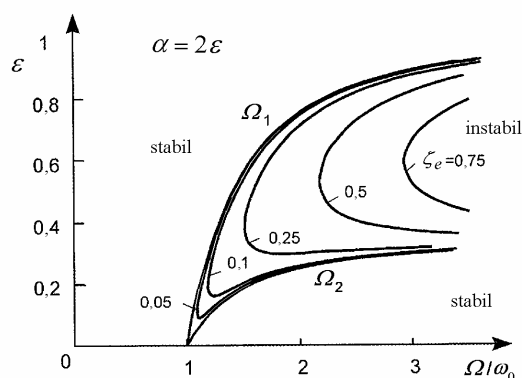


Fig. 7.42 [7.14]

7.6.4 Analiza cu elemente finite a rotoarelor axial asimetrice

Dacă rotorul este axial asimetric și lagărele sunt axial anizotrope, ecuațiile de mișcare au coeficienți periodici atât față de triedrul de referință mobil cât și față de triedrul fix. În continuare se utilizează un triedru de referință fixat de stator. Rezolvarea problemei de valori proprii se face printr-o variantă a metodei Hill a determinantului infinit [7.26].

7.6.4.1 Matricile elementelor în triedrul de referință fix

În triedrul de referință mobil atașat rotorului, matricea de masă a unui element axial asimetric se poate aduce la forma

$$[M_r] = \begin{bmatrix} [m_1] & [0] \\ [0] & [m_2] \end{bmatrix},$$

unde $[m_1]$ și $[m_2]$ sunt matricile de masă coerente corespunzătoare coordonatelor din planurile 1, respectiv 2, perpendiculare între ele [7.27].

În triedrul de referință fix atașat statorului, matricea de masă se obține prin transformarea de congruență

$$[M_s] = [R][M_r][R]^T \quad (7.166)$$

unde matricea ortogonală de rotație

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix},$$

în care Ω este viteza unghiulară de rotație constantă a rotorului.

Matricea (7.166) se mai scrie

$$[M_s] = \begin{bmatrix} [m_m] + [m_d] \cos 2\Omega t & [m_d] \sin 2\Omega t \\ [m_d] \sin 2\Omega t & [m_m] - [m_d] \cos 2\Omega t \end{bmatrix} \quad (7.167)$$

unde

$$[m_m] = \frac{1}{2}([m_1] + [m_2]), \quad [m_d] = \frac{1}{2}([m_1] - [m_2]).$$

Matricea (7.167) poate fi scrisă sub forma

$$[M_s] = [M_0] + [M_{2s}] \sin 2\Omega t + [M_{2c}] \cos 2\Omega t \quad (7.168)$$

sau

$$[M_s] = [M_{-2}] e^{-i2\Omega t} + [M_0] + [M_{+2}] e^{+i2\Omega t} \quad (7.169)$$

unde

$$[M_{-2}] = \frac{1}{2}([M_{2c}] + i[M_{2s}]), \quad [M_{+2}] = \frac{1}{2}([M_{2c}] - i[M_{2s}]).$$

Analog, matricea combinată de amortizare și giroscopică se scrie

$$[C_s] = [C_{-2}] e^{-i2\Omega t} + [C_0] + [C_{+2}] e^{+i2\Omega t} \quad (7.170)$$

iar matricea de rigiditate pentru un arbore axial asimetric este

$$[K_s] = [K_{-2}] e^{-i2\Omega t} + [K_0] + [K_{+2}] e^{+i2\Omega t}. \quad (7.171)$$

Expresiile submatricilor din componența matricilor (7.169)-(7.171) sunt prezentate în Capitolul 5.

7.6.4.2 Rezolvarea ecuațiilor de mișcare cu coeficienți periodici

Ecuția de mișcare a modelului cu elemente finite al unui rotor cu elemente axial asimetric se poate scrie matricial sub forma (unde s-a renunțat la indicele s)

$$[M(t)]\{\ddot{u}\} + [C(t)]\{\dot{u}\} + [K(t)]\{u\} = \{F(t)\}. \quad (7.172)$$

În (7.172) matricile sunt reale și periodice, cu perioada $T = 2\pi/\Omega$:

$$[M(t)] = [M(t+T)], \quad [C(t)] = [C(t+T)], \quad [K(t)] = [K(t+T)].$$

Ecuția (7.172) se poate transforma într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi [7.28] care, în cazul $\{F(t)\} = \{0\}$, se scrie

$$\{\dot{x}(t)\} - [A(t)] \{x(t)\} = \{0\}, \quad (7.173)$$

unde

$$[A(t)] = [A(t+T)].$$

Ecuțiile diferențiale cu coeficienți periodici au soluții de forma

$$\{x^{(k)}(t)\} = e^{\lambda_k t} \{r^{(k)}(t)\} \quad (7.174)$$

unde $\{r^{(k)}(t)\} = \{r^{(k)}(t+T)\}$ este vectorul propriu asociat valorii proprii complexe

$$\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k. \quad (7.175)$$

Problema de valori și vectori proprii se rezolvă dezvoltând în serie Fourier matricea $[A(t)]$ și vectorii proprii $\{r^{(k)}(t)\}$

$$[A(t)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m] e^{im\Omega t}, \quad \{r^{(k)}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{r_n^{(k)}\} e^{in\Omega t}. \quad (7.176)$$

Înlocuind dezvoltările (7.176) în ecuația (7.173) rezultă

$$\lambda_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{r_n^{(k)}\} e^{in\Omega t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\Omega \{r_n^{(k)}\} e^{in\Omega t} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m] e^{im\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{r_n^{(k)}\} e^{in\Omega t} = 0,$$

ecuație ce trebuie satisfăcută pentru toate pulsațiile $n\Omega$ în mod independent.

Anularea coeficienților termenilor $e^{in\Omega t}$, pentru fiecare valoare n (echilibrarea armonicelor), conduce la o hiper-problemă de valori și vectori proprii (de dimensiuni infinite) de forma

$$\left(\lambda_k [I] - \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & [A_0] - i2\Omega [I] & [A_{-1}] & [A_{-2}] & \dots & \dots & \dots \\ \dots & [A_{+1}] & [A_0] - i\Omega [I] & [A_{-1}] & [A_{-2}] & \dots & \dots \\ \dots & [A_{+2}] & [A_{+1}] & [A_0] & [A_{-1}] & [A_{-2}] & \dots \\ \dots & \dots & [A_{+2}] & [A_{+1}] & [A_0] + i\Omega [I] & [A_{-1}] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & [A_{+2}] & [A_{+1}] & [A_0] + i2\Omega [I] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \{0\}$$

sau

$$(\lambda_k [I] - [B]) \{q^{(k)}\} = \{0\}. \quad (7.177)$$

Matricea $[B]$, cu elemente constante (invariante în timp), are un număr infinit de vectori (și valori) proprii, care nu sunt toți liniar independenți. Pentru a descrie complet soluția omogenă sunt necesari numai $2N$ vectori (și valori) proprii, unde N este dimensiunea matricilor sistemului original.

Într-adevăr

$$\{x^{(k)}(t)\} = e^{\lambda_k t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{r_n^{(k)}\} e^{in\Omega t} = e^{(\lambda_k + i l \Omega) t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{r_n^{(k)}\} e^{i(n-l)\Omega t}.$$

Rezultă că

$$\lambda_l = \lambda_k + i l \Omega = \alpha_k + i(\omega_k + l \Omega), \quad (l = \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots)$$

este de asemenea o valoare proprie a matricii $[B(t)]$, iar vectorul propriu corespunzător este

$$\{q^{(l)}\} = \{q^{(k)}\} e^{-il\Omega},$$

deci numai $2N$ vectori proprii sunt liniar independenți [7.28].

Pentru calcule practice, seria Fourier infinită se trunchiază la primele p armonice, deci la $(2p+1)$ termeni.

Aceasta conduce la problema finită de valori și vectori proprii

$$(\lambda_k [\hat{I}] - [\hat{B}]) \{\hat{q}^{(k)}\} = \{\hat{0}\} \quad (7.178)$$

de dimensiune $2N(2p+1)$, unde $2N$ este numărul gradelor de libertate.

Din cele $2N(2p+1)$ valori (și vectori) proprii ai matricii $[\hat{B}]$ se calculează cele $2N$ valori (și vectori) proprii *de bază* [7.28]. În general, singura dificultate majoră în rezolvarea problemei de valori și vectori proprii (7.178) o reprezintă inversarea matricii $[M_s]$ pentru obținerea formulării în spațiul stărilor (7.173), în special la sisteme cu asimetrie pronunțată.

Bibliografie

- 7.1 Ehrich, F. F. (ed.), *Handbook of Rotordynamics*, McGraw Hill, New York, 1992.

- 7.2 Crandall, S. H., *Physical explanations of the destabilizing effect of damping in rotating parts*, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, NASA CP 2133, 1980, p. 369-382.
- 7.3 McCallion, H., *Vibration of Linear Mechanical Systems*, Longman, London, 1973.
- 7.4 Lee, C.-W., *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1993.
- 7.5 Muszynska, A., *Whirl and whip – rotor/bearing stability problems*, Instability in Rotating machinery, NASA CP 2409, 1985, p. 155-177.
- 7.6 Nelson, F. C., *A review of the origins and current status of rotor dynamics*, Proc. 6th Int. Conference on Rotor Dynamics, Sydney, Australia, Sept 30 –Oct 4, 2002, p. 745-751.
- 7.7 Rao, J. S., *Rotor Dynamics*, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1983.
- 7.8 Sternlicht, B. and Rieger, N. F., *Rotor stability*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers., vol.182, Pt.3A, 1967-1968, p. 82-99.
- 7.9 Crandall, S. H., *Heuristic explanation of journal bearing instability*, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, NASA CP 2250, 1982, p. 274-283.
- 7.10 Sommerfeld, A., *Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, vol.50, 1904, p. 97-155.
- 7.11 Newkirk, B. L. and Taylor, H. D., *Shaft whipping due to oil action in journal bearings*, General Electric Review, vol.28, 1925, p. 559-568.
- 7.12 Robertson, D., *Whirling of a journal in a sleeve bearing*, Philosophical Magazine, S.7, vol.15, no.96, 1933, p. 113-130.
- 7.13 Lund, J. W., *Some unstable whirl phenomena in rotating machinery*, Shock and Vibration Digest, vol.7, no.6, 1975, p. 5-12.
- 7.14 Gasch, R. and Pfützner, H., *Rotordynamik*, Springer, Berlin, 1975.
- 7.15 Fritzen, C. P. and Nordmann, R., *Influence of parameter changes to stability behavior of rotors*, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, NASA CP 2250, 1982, p. 284-306.
- 7.16 Thomas, H.-J., *Instabile Eigenschwingungen von Turbinenläufern, angefacht durch die Spaltströmungen in Stopfbuchsen und Beschaufelungen*, AEG-Sonderdruck Z10/5729, 1958.
- 7.17 Alford, J. S., *Protecting turbomachinery from selfexcited whirl*, Journal of Engineering of Power, Trans. ASME, Series A, vol.87, no.10, 1965, p. 333-344.
- 7.18 Newkirk, B. L., *Shaft rubbing*, Mechanical Engineering, vol.48, 1926, p. 830-832.

- 7.19 Ehehalt, J., Hochlenert, D., Markert, R. and H. I. Weber, *Approximate description of backward whirl at rotor-stator-contact*, Advances in Vibration Control and Diagnostics (N. Bachschmid and P. Pennacchi, eds), Polimetrica Int. Sci. Publ., Monza, Italy, 2006.
- 7.20 Bartha, A. R., *Dry Friction Backward Whirl of Rotors*, Dissertation ETH No. 13817, E.T.H. Zürich, 2000.
- 7.21 Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, 4th ed., McGraw-Hill, 1956.
- 7.22 Ehrich, F. F., *The dynamic stability of rotor/stator radial rubs in rotating machinery*, Journal of Engineering for Industry, Trans.ASME, Series B, vol.91, no.4, 1969, p. 1025-1028.
- 7.23 Krämer, E., *Maschinendynamik*, Springer, Berlin, 1984.
- 7.24 Taylor, H. D., *Critical-speed behavior of unsymmetrical shafts*, Journal of Applied Mechanics, June 1940, p. A71-A79.
- 7.25 Brosens, P. J. and Crandall, S. H., *Whirling of unsymmetrical rotors*, Journal of Applied Mechanics, Trans.ASME, Series E, vol.28, no.3, 1961, p. 355-362.
- 7.26 Xu, J., *Aeroelastik einer Windturbine mit drei gelenkig befestigten Flügeln*, Fortschrittsberichte VDI, Reihe 11, No.185, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1993.
- 7.27 Genta, G., *Whirling of unsymmetrical rotors. A finite element approach based on complex coordinates*, Journal of Sound and Vibration, vol.124, no.1, 1988, p. 27-33.
- 7.28 Gasch, R. Knothe, K., *Strukturdynamik*, Springer, Berlin, 1989.

Bibliografie selectivă

- 7.29 Biezeno, C. B. and Grammel, R., *Technische Dynamik*, Bd.3, Springer, Berlin, 1953.
- 7.30 Bolotin, V. V., *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, London, 1963.
- 7.31 Dimentberg, F. M., *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*, Butterworth, London, 1961.
- 7.32 Gasch, R., Nordmann, R. and Pfützner, H., *Rotordynamik*, 2. Auflage, Springer, Berlin, 2002.
- 7.33 Krämer, E., *Dynamics of Rotors and Foundations*, Springer, Berlin, 1993.
- 7.34 Thomas, H. J., *Thermische Kraftanlagen*, 2.Aufl., Springer, Berlin, 1985.
- 7.35 Tondl, A., *Some Problems of Rotor Dynamics*, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1965.

- 7.36 Vance, J. M., *Rotordynamics of Turbomachinery*, Wiley, New York, 1988.
- 7.37 Crandall, S. H. and Brosens, P. J., *On the stability of rotation of a rotor with rotationally unsymmetric inertia and stiffness properties*, Journal of Applied Mechanics, Trans.ASME, Series E, Dec 1961, p. 567-570.
- 7.38 Hori, Y., *A theory of oil whip*, Journal of Applied Mechanics, Trans.ASME, Series E, vol.26, no.2, 1959, p. 189-198.
- 7.39 Inagaki, T., Kanki, H. and Shiraki, K., *Response analysis of a general asymmetric rotor-bearing system*, Journal of Mechanical Design, vol.102, no.1, 1980, p. 147-157.
- 7.40 Iwatsubo, T., *Stability problems on rotor systems*, Shock and Vibration Digest, vol.11, no.3, 1979, p. 17-26.
- 7.41 Jei, Y.-G. and Lee, C.-W., *Modal characteristics of asymmetrical rotor-bearing systems*, Journal of Sound and Vibration, vol.162, no.2, 1993, p. 209-229.
- 7.42 Lund, J. W., *Stability and damped critical speeds of a flexible rotor in fluid-film bearings*, Journal of Engineering for Industry, Trans.ASME, Series B, vol.96, no.2, 1974, p. 509-517.
- 7.43 Smith, D. M., *The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings*, Proceedings of the Royal Society, London, Series A, vol.142, 1933, p. 92-118.
- 7.44 Vance, J. M. and Laudadio, F. J., *Experimental measurement of Alford's force in axial flow turbomachinery*, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, NASA CP 2250, 1982, p. 260-273.
- 7.45 Yamamoto, T. and Ota, H., *On the unstable vibrations of a shaft carrying an unsymmetrical rotor*, Journal of Applied Mechanics, Sept 1964, p. 515-522.

Index

- Amortizare**
 - externă 166, 195, 216, 225
 - negativă 178
 - rotativă 164, 170
 - staționară 172
- Amortizoare cu film expulzat 130
- Analiza cu elemente finite 1, 226
 - modală 47
 - spectrală 48
 - valorilor proprii 40
- Anizotropia arborelui 207
- Arbore axial asimetric 216
- Axa slabă 208
- Blade-tip-clearance-effect** 199
- Blocarea inelului etanșării 154
- Bulk flow 139
- Cinematica mișcării eliptice** 49
- Coeficienții dinamici ai lagărelor 83, 195
 - – la etanșare blocată 155
 - – la etanșări inelare cu lichid 139
- Coordonate fixe 208, 221, 226
 - mobile 208
 - rotative 171, 222
 - staționare 171
- Condensarea
 - combinată statică și modală 66
 - Guyan/Irons 57
 - modală 60
 - modelului 56
- Condiția de stabilitate 223, 225
- Condiții la limită 85
 - – – Gumbel 89, 99
 - – – Reynolds 90
 - – – Sommerfeld 89
- Crandall 164, 179
- Cuplaje elastice 35
- Curgerea Couette 88
 - Poiseuille 88
- Decrementul logaritmic 43
- Dezechilibrul masic 10
- Diagrama Campbell 43
 - de stabilitate 43, 213
 - pulsațiilor proprii de precesie 211
 - vâscozitate-temperatură ASTM 109
- Disc axial asimetric 219
- Ecuția de continuitate** 88
 - lui Walther 109
 - Reynolds 87
- Ecuțiile de mișcare 16, 36, 168, 195, 217, 225, 227
 - lui Euler 219
 - lui Lagrange 1, 8
- Efectul Lomakin 138
 - jocului la capătul paletelor 199
- Etanșări cu contact flotant 150
 - cu gaz 147
 - cu lichid 39, 137
 - inelare 34
 - labirintice 147
- Excentricitatea relativă 79
- Factor de asimetrie masică** 222
 - de cuplaj giroscopic 222
 - de preîncărcare 118
- Forța tangențială destabilizatoare 202
- Forțele de dezechilibru 12, 27, 39
- Frecare de contact 203
 - uscată 204
- Funcții de formă 19
- Gradul de asimetrie** 208
- Grinda Bernoulli-Euler 16, 18
 - Bresse-Timoshenko 13, 18
- Indicele de vâscozitate** 111
- Instabilitatea rotoarelor 161
- Interacțiunea roată-difuzor 201
- Încărcare prin greutatea proprie** 214
- Înclinarea discului 10
- Jensen** 141
- Lagăr radial** 31, 77

- circular 112
- cu bușă flotantă 129
- cu canale axiale 112
- cu cuzinet complet 112
- cu film fluid 77
- cu patru lobi 121
- cu prag de presiune 114
- – multilobat 122
- cu segmenti oscilanți 124
- cu semicuzineți decalati 116
- cu treaptă de presiune 114
- cu treaptă Rayleigh 128
- cu trei lobi 120
- de lungime finită (Moes) 99
- de lungime infinită (Sommerfeld) 99
- eliptic 118
- infinit scurt (Ocvirk) 90
- lămâie 118
- multilobat 117
- Sommerfeld 99, 179
- Macroelemente** 59
- Masa critică a rotorului 192
- Matricea giroscopică 7, 21, 38
 - de masă 7, 21, 38
 - de rigiditate 24, 31, 38
- Metoda cercurilor concentrice 54
- Modelarea rotorului 29
- Modelul lui Black 141
 - lui Childs 143
 - lui Jensen 141
- Moduri de constrângere statică 65
 - normale constrânse 64
- Momente giroscopice 11
- Numărul Sommerfeld 80, 100
- Oil whip** 174
 - whirl 174
- Orbite 49
- Precesie**
 - contra-rotativă 171
 - co-rotativă 171
 - datorită aburului 199
 - datorită uleiului 174
 - directă 4, 197
 - instabilă 173
 - inversă 4, 171, 203
 - la semifrecvență 176
 - uscată 204
- Pulsația precesiei instabile 191
- Raportul de amortizare** 43,
- Răspunsul la dezechilibru 47, 213
- Reducere pas cu pas 68
- Reducerea ordinului modelului 56
- Relația vâscozitate-temperatură 109
- Rezonanța datorită uleiului 183
 - subarmonică 215
- Rigiditate transversală de cuplaj 140, 162
- Routh-Hurwitz 188
- Squeeze film** 130
- Stabilitatea sistemelor liniare 187
 - neutră 184
- Steam whirl 199
- Substructurarea modelului 62
- Taylor 216
- Temperatura lagărelor 107
- Triedre de referință 3
- Turația critică 44
 - – secundară 215
- Turația de apariție a instabilității 162, 178
 - la limita de stabilitate 168
- Unghiul de atitudine 79, 100
- Vâscozitatea absolută** 109
 - cinematică 109
 - dinamică 109
- Vectori proprii 41
- Viteza unghiulară critică
 - – – secundară 215
 - – de precesie 43, 56
 - – de rotație 4